

5.3.981

ELEMENTI
DI
FISICA IMMECCANICA

OPVERO

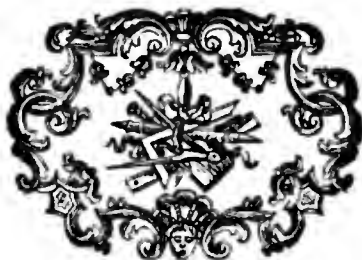
INTRODUZIONE A QUELLA PARTE PIU' IMPORTANTE
DI FILOSOFIA NATURALE

*Che richiede principalmente la dimostrazione, e la distin-
zione delle forze intrinseche, ed inerenti a' Corpi, ne-
cessarie per effettuare la massima parte de' Fenomeni
nell' Universo. Il tutto eseguito con metodo Masematico.*

OPERA
DEL DOTTORE
JACOPANDREA TOMMASINI

PROFESSORE DI MEDICINA:

Tomo Primo.



L U C C A MDCCCLXII.

Per GIUSEPPE ROCCHI
CON LICENZA DE' SUPERIORI

5. 3. 281

III
ALL' ALTEZZA REALE
D I
D. FILIPPO

INFANTE DI SPAGNA, DUCA DI PARMA,
PIACENZA, E GUASTALLA,
&c. &c. &c.

ALTEZZA REALE.



*ON ad altro fine
è piaciuto alla
favolosa Antichi-
tà, che i Numi stessi presieda-*

a 2

no

*no alle Scienze, ed alle belle
Arti, se non per dimostrarci,
che tali occupazioni importan-
tissime all' uman genere rico-
noscono la loro nascita, e la
loro protezione dal Cielo; or
siccome i Principi sono in Ter-
ra un raggio ed un immagi-
ne della Divinità, debbono ad
imitazione di essa farsi pre-
gio di proteggere, ed incorag-
giare quei Coltivatori di tali
studj, i quali, postposti i loro
comodi alla pubblica utilità,
non risparmiano nè sudori, nè
vigilie per dilatarne i confini.*

Que-

111

v

Questa eroica propensione risplende particolarmente nell'animo Grande di VOSTRA ALTEZZA REALE, che non solo dilettafi d'accogliere le Virtù tutte sotto l'asilo del suo Patrocinio, ma non contenta delle più erudite, e più dilettevoli letterarie occupazioni, ha voluto ad onta di tante cure, che esige il Governo amoroso, e giusto de' suoi Popoli, penetrare negli astrusi nascondigli dell'umano sapere, non rifiutando di adattare la Real mano fino a trattare quei mara-

vi.

vigliosi, ed a pochi noti simboli, che guidano alla precisione del vero, in occasione specialmente di contemplare il sovrumano magistero dell' Universo. A VOI dunque, REALE ALTEZZA, era ben giusto, che io ossequiosamente offerissi questa mia qualunque siasi letteraria fatica; anzi me ne correva un obbligo indispensabile, per dare in tal guisa un pubblico attestato di perpetua gratitudine a quegli atti generosi di benefica Clemenza, che non sdegnaste d' esercitare verso di
me,

me, allorchè ebbi l'onore, trattenendomi alla VOSTRA Real Corte d'umiliarmi più volte tanto all'Eccelsa VOSTRA Persona, quanto a quella della Reale VOSTRA FIGLIA, a cui il Cielo aveva già partecipato l'eminente gloria d'unire sotto l'ombra degli invitti Gigli d'oro, e del Lauro sacro, e trionfale due delle più Auguste, ed immortali Prosapie. Piccolo è certamente il tributo, perchè maggiore non me lo permette il destino; ma sento nondimeno, che una dolce speranza

mi

mi promette da un Cuore così magnanimo, qual è quello dell' ALTEZZA VOSTRA REALE, un benigno compatimento . Permettetemi, Ve ne supplico, di secondare questa innocente lusinga, mentre baciandovi col più profondo rispetto l' Augusta mano, compisco i miei Voti col dichiararmi

DI V. ALTEZZA REALE

Umiliss. Devotiss. Obbligatiss. Servitore
Jacopandrea Tommasini.

P R E F A Z I O N E .

LE continue implacabili discordie, che dividono i Filosofi di qualunque ordine in occasione di esaminare quell'azione universale della materia, che Attrazione comunemente addimandasi, m' hanno reso fin da' miei più verd'anni irresoluto sulla scelta de' due famosi partiti, l'uno de' quali pretende, che tale Attrazione provenga da impulso, e che perciò debbasi riguardare come un principio meccanico; l'altro, che da niuna causa esteriore derivi, e però convenga come un principio immeccanico, ed inerente alla massa considerarsi. Da un canto io m'accorgeva, che qualunque fosse il principio impellente, siccome non si poteva fare a meno d' ammetterlo corporeo, non restava quieta la mente senza ricercarne la causa motrice, che ristorasse ad un tempo le perdite successive di moto accadute per il soffregamento della resistente materia; sicchè ne veniva l'inconveniente di dover supporre un altro motore corporeo secondario, e così all' infinito. Dall' altro canto mi sgomentava l' impossibilità di concepire, come, essendo due corpi posti in distanza, l' uno potesse agire sull' altro senza strumento alcuno intermedio per riuscirvi, e ciò tanto più poneami in angustia, perchè io m'accorgeva, che i più celebri, ed appassionati Attrazionisti riguardavano quest' obbiezione come un ostacolo insormontabile. La materia intanto in mezzo alle Filosofiche dissensioni proseguiva ad esporre tranquillamente indubitati segni di questa forza reciproca, e la Geometria dimostrava, che per il computo di essa unicamente, e non per altri mezzi, ottenere poteasi l' intelligenza più facile, e più netta, e la soluzione più semplice, e più universale de' più reconditi, e rilevanti fenomeni. Era dunque d' una massima importanza il trovare qualche plausibile uscita in tanta dubbiezza; ma come farlo? Miglior compenso scegliere a mio giudizio non si poteva, che, deposto ogni pregiudizio, ed ogni prevenzione, non muover passo, se non con la guida d' un rigoroso discorso consecutivamente

b

con-

condotto, e stabilito sovra basi non vacillanti fino al conseguimento; se possibil fosse, del vero. Con questa precauzione io ho procurato di tentare in sì malagevole impresa le mie deboli forze, e per maggiore esattezza, e chiarezza insieme mi son servito d'uno stretto metodo matematico, cominciando dal definire le voci più importanti a fine d'evitare i contrasti, che provengono dall'affissare idee differenti all'istesse parole, e notando di mano in mano que' pensieri, e que' raziocinj, che più probabili mi sembravano, ed al vero più confacenti, finchè parmi d'esser giunto, se l'amor proprio non mi tradisce, ad appagarmi, almeno quanto basta, relativamente alle ricerche desiderate.

Ecco dunque come è nata quest'Opera, a cui ho procurato di dare quel finimento, che meglio per me potevasi, acciò portasse in fronte il titolo di *FISICA IMMECCANICA*, e che debbesi riguardare non come scritta per i sublimi Filosofi, ma come accomodata alla capacità della studiosa Gioventù: assai ricompensato stimandomi, se le mie lunghe, e laboriose meditazioni facili ad essa riusciranno, e fruttuose.

In tre Tomi divideasi tutta l'Opera, ed ogni Tomo in due parti. Nella prima parte del primo Tomo, rigettate le prove di coloro, i quali pretendono, che la materia risulti d'Enti semplici, ed inesisti, e dimostrato in più maniere, ch'essa non sia contro la comune opinione divisibile per natura all'infinito, si viene per necessaria conseguenza a determinare l'esistenza degli Atomi dotati d'un perfetto continuo. In questi Atomi poi dimostrasi, essere indispensabile una forza vicendevole, che non solo li mantenga al contatto, quanto ancora che operi in distanza, acciò restino adempiti i fenomeni, che in natura s'osservano; ed una tal forza, che da per tutto per mezzo dell'osservazione, e dell'esperienza si ravvisa, convincesi abbondantemente, che non può da veruno agente estrinseco riconoscer l'origine, con che resta finalmente stabilito, che debba essere annessa, ed intrinseca alla materia.

In tale occasione si tratta dello Spazio, e del Tempo, e rigettate tante razze romanzesche d'infiniti, s'ammette per solo infinito assoluto lo Spazio, il quale anche per tal proprietà non può confondersi col nulla positivo.

La seconda parte d'esso primo Tomo contiene un Trattato di Geo-

Geometria sublime per disporre le menti all'intelligenza de' Problemi, che ne' due Tomi susseguenti si scioglieranno. Forse farà parere d'alcuni, che questo Trattato sia troppo prolisso, o che potesse tralasciarsi; ma motivi ben giusti a mio credere m'hanno determinato a quì collocarlo. Primieramente acciò i miei cortesi Lettori, che suppongo a sufficienza informati delle sezioni Coniche, e delle quattro principali operazioni dell'Algoritmo, trovino in quest'Opera senza ricorrere altrove tutto ciò, che è necessario per facilmente comprenderla, giacchè le più belle cognizioni della Fisica non possono andar disgiunte dalle più belle notizie della Geometria. In secondo luogo volendo a norma de' più esatti Matematici, e specialmente de i sempre ammirabili Principj NEWTONIANI, spiegar tutto geometricamente per maggior soddisfazione dell' intelletto sulla maniera rigorosa degli Antichi, oltre all' esporre più metodi a tal fine conducenti, parte de' quali sono stati ricavati dall' Opere del Chiarissimo P. GRANDI, io ne metto in vista de' nuovi, per difendere, ed incamminare alla perfezione gl'INDIVISIBILI, che hanno sortito la loro nascita dalla gran mente del GALILEO, e che sono stati poscia tanto promossi dal P. CAVALERIO, dal TORRICELLI, e dal DE ANGELIS, facendo conoscere, che si possono sovra di essi fondare con maggior sicurezza, chiarezza, e semplicità i principj del famoso Calcolo infinitesimale, che è tanto in uso, le di cui primarie operazioni restano in questa occasione, senza dover ricorrere alli spazj descritti, alle velocità, ed a' tempi, con ordine puramente geometrico dimostrate. Sicchè questo Trattato, oltr' all' esercitare la Gioventù, può servirle d' introduzione a detto Calcolo, appianandole quelle difficoltà, e dileguandole que' sospetti, che al di lui ingresso comunemente s' incontrano, quando non si vogliano mettere in conto i nuovi metodi, che somministra. Al che aggiungasi, che elièndo le Matematiche riputate da uomini dottissimi come una cosa di mezzo tra la Metafisica, e la Fisica, sembravami, che questo fosse il loro posto conveniente.

Nella prima parte del secondo Tomo, per allusare la Gioventu alla Matematica mista, si considera in primo luogo l' ipotesi particolare del moto uniformemente accelerato, e ritardato, da cui ricavasi il carattere dell'

Gravità presso alla superficie terrestre, cioè della Gravità GALILEANA; indi si passa a' metodi generali per trovare geometricamente gli spazj, i tempi, le velocità, e le forze in qualunque ipotesi di movimento.

Nella seconda parte dello stesso secondo Tomo dopo considerata la gravitazione reciproca, il peso, e il centro di Gravità vicino alla detta superficie terrestre, si tratta della Gravità agente a grandi intervalli, o sia della Gravità NEWTONIANA, assegnandone il carattere; e giacchè la Terra può supporfi sferica per la piccola diversità de' suoi grand'assi, s'applica tal carattere alle gravitazioni sì al di fuori, che al di dentro de' corpi sferici tanto omogenei, quanto risultanti di sfoglie sferiche eterogenee; nella qual' occasione dimostrasi, che i corpi tendono spontaneamente, per così dire, l'uno verso dell' altro, ma con una legge inviolabile, e però non dovendo l'uno tirar l'altro, svanisce la famosa obbiezione, con cui negasi la forza reciproca immeccanica della materia per la ragione che si darebbe azione in distanza. Siccome poi tre sono l'ipotesi di moto rettilineo, che cadono sotto la considerazione di dette gravitazioni sì fuori, che dentro de' corpi sferici, queste vengono non solo separatamente, ma promiscuamente ancora esaminate col titolo di forze centrali, per paragonare le velocità, e i tempi, tanto in caso che uno di tali corpi sia fisso, e l'altro mobile, quanto in caso che amendue siano mobili. In oltre dopo d'aver esposti alcuni sospetti sull'universalità della terza Legge NEWTONIANA riguardo alla Fisica immeccanica, si prendono ad investigare le forze, le velocità, e i tempi nel moto curvilineo; trasportare le quali teorie al moto de' Pianeti, e proposte in tal congiuntura alcune nuove riflessioni sul Sistema celeste in generale, si termina con stabilire l'origine della Gravità specifica.

La prima parte del terzo Tomo aggirasi sulle proprietà della Attrazione operante a piccoli intervalli; onde considerati primieramente i caratteri più generali delle forze attrattrici, si passa in seguito a trattare della loro diversa intensione, ed estensione; della maggiore, o minor forza della gravità rispetto a quella, con cui i solidi con i solidi, i fluidi con i fluidi, e i solidi con i fluidi stanno all'aderenza;

za;

za; della misura delle forze attrattive in generale, e loro paragone, dove dimostrarli, che elleno diversificano nel carattere dalla gravità: de' Mestruî chimici; delle forze attrattive neutre; de' corpi mediatori; della diffusione de' fluidi; e di altre particolarità ad esse forze appartenenti. Quantunque poi vi sia poca speranza di poter rintracciare le leggi di queste forze, perchè per il loro troppo corto raggio d'attività far non si possono le debite osservazioni, nè impiegarvi replicate esperienze, nondimeno dal fenomeno de' tubi capillari, si può a mio credere molto probabilmente concludere, che una sola sia in loro la legge, per cui esse agiscano inversamente a' cubi delle distanze, benchè diverse tra loro, siasi provato, che esser possano tanto nell'intensione, che nell'estensione. Dal che vedesi, che basta una sola formula d'attività a comprendere le leggi tutte immeccaniche infuse da Dio nella materia; il che ci convince della massima semplicità, con cui essa tanto per l'adempimento de' suoi moti, quanto delle sue produzioni è nel suo genere costrutta, e regolata. Nè posso intanto tralasciar d'avvertire, ch'io non manco in varj luoghi di questa prima parte non solo di rispondere a molte forti obbiezioni, che sono state fatte contro l'esistenza dell'Attrazione, quanto ancora di far conoscere, che molto utile, anzi indispensabile è la notizia di questa forza per applicarne le proprietà alla scienza medica, a fine di ricavarne importantissime teorie.

La seconda parte di questo terzo Tomo abbraccia nella sua piccola estensione un esame della decantata Ripulsione; e giacchè oltre all'incontrarsi non poche difficoltà nell'adottarla, parecchi fenomeni, che vengono con essa spiegati, spiegar si possono coll'Attrazione, sene sospende l'assenso, finchè ne resti più sicuramente stabilita la realtà; essendo innegabile, che quando una cagione tra le cognite sia sufficiente a produrre un effetto fisico qualunque, non si deve per spiegarlo ricorrere ad un'altra, che sia nel numero dell'incognite.

Questo è il prospetto in generale di tutta l'Opera, tralasciate varie particolarità, quantunque assai rilevanti, che troppo l'estenderebbero. Molte volte poi tanto le Proposizioni matematiche, quanto le Fisco-matematiche sono state da me dimostrate in più maniere,
per.

per maggiormente appagare la studiosa Gioventù sulle verità, che contengono, e per incitarla con tal maravigliosa cospirazione all'acquisto d'ulteriori cognizioni, non avendo mancato d'aggiungervi gli esempi più facili, acciò sulla guida di questi ella possa farli strada a i più difficili.

Mi conviene talvolta attaccare, e ribattere l'altrui opinione, adducendone i miei da me creduti giusti motivi; ma mi dichiaro, che non manco per questo di conservare tutta la stima, e di professare tutta la venerazione verso il merito raro, ed eminente di que' Valentuomini, a' quali m'oppongo, e che sono della Repubblica Letteraria sì benemeriti. Io non pretendo, come dice il sottilissimo LOCKE *(a)*, d'insegnare, ma di cercare la verità; onde lascio al Pubblico il decidere a suo piacimento di questa mia qualunque siasi filosofica fatica, egualmente felice riputandomi, se altri potrà per qualche verso illuminare, o se da altri farò ne' miei travimenti illuminato.

Bramerei per altro, che per la piena intelligenza delle cose da me trattate fosse da' miei cortesi Lettori bastantemente scorsa quest'Opera prima che si determinassero a fornarme il giudizio; giacchè non si può sempre o in un solo Paragrafo, o in un solo Capitolo abbracciar tutto, proibendolo molte volte il metodo, la difficoltà, e la separazione de' soggetti diversi; e poi possono, come è noto, sovvenire, anzi sovengono di fatto nuove riflessioni in progresso, che di primo abbordo alla mente non presentavansi.

E qui prima di dar fine a questa Prefazione, mi sia permesso d'accennare, che l'Attrazione era cognita anco agli Antichi, come molto eruditamente avverte il celebre Giacomo KEIL, *(b)*: ma il primo, che cominciasse a ridurla in qualche maniera a metodo geometrico, e che facesse intorno ad essa molte belle Esperienze, fu il Canonico Donato ROSSETTI, come apparisce dalle sue Opere, le quali per la loro rarità erano al vedere ignote all'illustre Pietro DE MARTINO; altrimenti egli non ne avrebbe certamente attribuito il pregio totale all'Inghilterra *(c)*, togliendone la prima parte all'Italia sua patria; la quale a dispetto degl'invidiosi, che ne sparlano, avrà sempre la gloria d'essere stata maestra in Cattedra, e domatrice in Campo delle Nazioni.

I N-

(a) Entend. hum. Lib. II. Cap. XI. §. 17.

(c) Instit. Phil. Nat. T. I. Cap. I. §.

(b) Disquisit. de corporis animati vi attrahente.

27. & Cap. VIII. 139.

I N D I C E

xv

D E' C A P I T O L I

Contenuti nella Prima Parte.

C A P I T O L O I.

D *Efinizioni, Affiomi, e Suppoſizioni; pag. 3.*

C A P I T O L O II.

De' Caratteri generali della Materia; pag. 27.

C A P I T O L O III.

Dell'eſiſtenza degli Atomi, e de' loro ſintomi; pag. 35.

C A P I T O L O IV.

Del Pieno, e del Vuoto; pag. 76.

C A P I T O L O V.

Del Tempo; pag. 92.

C A P I T O L O VI.

Della Forza d'aderenza anneſſa intrinſecamente agli Atomi, e conſiderata come un carattere generale della materia, indiſpenſabile per l'eſſettuazione de' Fenomeni, che in Natura ſ'offervano; pag. 103.

C A P I T O L O VII.

Degl'inconvenienti, che provengono dal Siſtema d'un fluido univerſale non ſolo ſaſciante, ma penetrante per i pori i corpi tutti, e formante col ſuo rapido movimento, o con la preſſione, o con la forza elſtica i Fenomeni della gravitazione, e dell'aderenza de i detti corpi; pag. 122.

C A P I T O L O VIII.

Contenente alcuni Corollarij generali conſecutivi allo ſtabilimento ſuperiormente fatto d'un principio attivo inerente alla materia; pag. 145.

C A P I T O L O IX.

In cui ſ'eſpone il metodo per conoſcere, quando nella ſpiegazione d'un Fenomeno ricorrer debbaſi al principio attivo riſedente nella materia; pag. 152.

IN-

XVI
I N D I C E

D E' C A P I T O L I

Contenuti nella Seconda Parte.

C A P I T O L O I.

Delle Tangenti; pag. 165.

C A P I T O L O II.

Del rapporto degli spazj Curvilinei; pag. 191.

C A P I T O L O III.

Della quadratura degli spazj Curvilinei; pag. 208.

C A P I T O L O IV.

Del metodo diretto, ed inverso, appartenente agl'Indivisibili; pag. 303.

C A P I T O L O V.

Nuovamente delle Tangenti; pag. 336.

C A P I T O L O VI.

Della rettificazione delle Curve; pag. 340.

C A P I T O L O VII.

Delle Cubature; pag. 359.

C A P I T O L O VIII.

Dello spianamento delle superficie de' corpi; pag. 372.

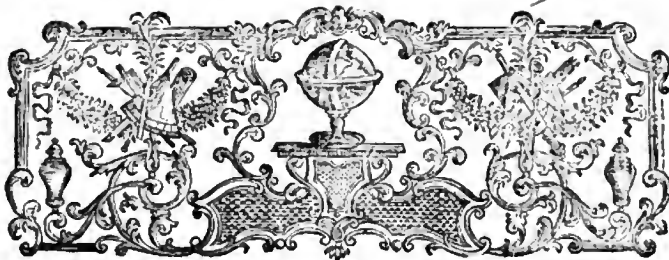
C A P I T O L O IX.

Della misura delle superficie rispetto alla solidità, che comprendono; pag. 391.

ELEMENTI
DI
FISICA IMMECCANICA.

*Nullius addictus jurare in verba Magistri,
Quo me cumque rapit tempestas, deferor hospes:*

Hor. Epist. I;



P A R T E I.

CAPITOLO PRIMO.

Definizioni, Affiomi, e Supposizioni.

..*.*.*

D E F I N I Z I O N I.

I.

I.



ER MATERIA intendo tutte le cose sensibili, o tutto ciò, che può in qualunque maniera far impressione su i nostri sensi.

II.

2. Per CORPO intendo una porzione di detta materia.

A 2

POS-

4 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

III.

3. POSSIBILE è ciò, che non implica contraddizione all' esistenza.

IV.

4. IMPOSSIBILE è ciò, che implica contraddizione all' esistenza.

V.

5. NECESSARIO è ciò, che ripugna, o che è impossibile, che non sia.

VI.

6. CONTINGENTE è ciò, che può essere, e non essere, ovvero ciò, che ripugna, o che è possibile, che non sia.

VII.

7. VERITA' è un rapporto necessario tra i termini d'una proposizione. In virtù di tal rapporto sono vere le proposizioni: *Il tutto è maggior della parte: Due, e due fanno quattro, &c.*

VE.

VIII.

8. VERISIMILE è ciò, che non mostra apparente contraddizione.

IX.

9. INVERISIMILE è ciò, che mostra apparente contraddizione.

X.

10. PROBABILE è ciò, che ammette ogni verisimiglianza.

XI.

11. IMPROBABILE è ciò, ch' esclude ogni verisimiglianza.

XII.

12. REALE, ASSOLUTA, O SOSTANZIALE dicesi una cosa, ch' esiste per se stessa; cioè, che si considera, come se avesse un' esistenza indipendente, e non come se fosse parte d' un' altra cosa.

RE-

XIII.

13. RELATIVA, O ACCIDENTALE dicefi quella cofa , che fi confidera non per fe fola , ma paragonata ad un' altra , dimodoche riguardata , e confiderata in faccia all'altre , può al variar di quelle cangiarfi anche nella noftra mente l'idea, ch' ella prima le fomminiſtrava.

XIV.

14. ENTE, ENTI, ESSERE, ESSERI, SOSTANZA, SOSTANZE REALI , O POSITIVE chiamo tutte quelle cofe , che hanno un'eſiſtenza attuale , a differenza degli *Enti negativi*, che hanno ſoltanto l'eſiſtenza poſſibile .

XV.

15. ASTRATTO è un'operazione della mente , allorchè ci rappreſentiamo una cofa , che confideriamo da ſe ſola ſenza riguardo al ſoggetto , in cui riſiede .

XVI.

16. CONCRETO è quell' operazione mentale , allorchè quando confideriamo una proprietà accompagnata col ſoggetto , che la poſſiede , o che la può poſſedere .

IN-

XVII.

17. INFINITO ASSOLUTO è quello , a cui non si può togliere, nè aggiungere cos' alcuna per alcun verfo.

XVIII.

18. INFINITO RELATIVO è quello , che quantunque finito, dicefi nondimeno infinito riguardo all'enorme differenza , che corre tra elfo , ed un'altra quantità , con cui fi paragona.

COROLLARIO.

19. Quindi è, che in tal fuppofto può darfi l'infinitamente grande, e l'infinitamente piccolo, de'quali parleraffi a fuo luogo.

XIX.

20. Per NATURA in generale intendo co' Platonici il divino magiftero impiegato nella materia.

XX.

21. VOLUME, o MOLE d' un corpo dicefi la trina dimenfione della fua grandezza.

MAS-

XXI.

22. MASSA , O QUANTITA' DI MATERIA di un corpo dicefi tutto il materiale compreso nel suo volume .

XXII.

23. LUOGO, SPAZIO, O VUOTO , dicefi ciò, che è suscettibile di materia; vale a dire ciò, che può darle ricetto riguardo alla collocazione.

XXIII.

24. MOTO , O MOVIMENTO è una mutazione successiva di luogo , o un'applicazione continua , e successiva del corpo fatta di luogo in luogo.

COROLLARIO I.

25. Dunque una cosa non può essere in due luoghi diversi tutt' alla volta ; e però non può darfi in Natura il moto istantaneo assoluto , o perfetto .

COROLLARIO II.

26. Siccome ripugna che la Natura resti oziosa , dovrà succeder qualche cosa prima che un corpo possa giungere da un luogo a un' altro .

Sco-

S C O L I O.

27. Questa successione di cose può per comodo supporfi uniforme.

XXIV.

28. TEMPO chiamasi quest'uniforme successione di cose.

C O R O L L A R I O.

29. Giacche il moto per la datane definizione (24.) è la misura dello spazio, ne segue, che lo spazio così misurato sarà maggiore, o minore, se l'istesso corpo durerà maggiore, o minor tempo a muoversi, cioè a misurarli, e perciò il tempo è indispensabile nella misura dello spazio scorso.

XXV.

30. QUIETE, o RIPOSO è la permanenza di un corpo nel medesimo luogo.

S C O L I O.

31. Tanto si può dire col Malebranche, che la quiete sia un *quid negativum*, cioè una mancanza di moto, quanto che il moto sia una mancanza di quiete. In fatti dicendo,

B

do,

10 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

do, che il moto è una successiva mutazione di luogo, non si definisce altro, che un effetto visibile; come per un effetto visibile si definisce la quiete, dicendo, ch'è una continua permanenza nel luogo istesso, onde, come ho detto, tanto la quiete è una negazione del moto, quanto il moto della quiete. Aggiungasi per conferma, che essendo la materia indifferente tanto al moto, ch'alla quiete, come dimostrerassi in appresso, non si può dire, che l'uno dall'altra, o l'altra dall'uno derivino; Poiche se la quiete non tirasse la sua origine, che da una mancanza di moto, ne verrebbe, che non potrebbe un corpo trovarsi in quiete, se prima non fosse stato in moto, il che ripugna, potendo Dio collocare un corpo in perfetta quiete dentro lo spazio; così dicasi del moto. Le definizioni dunque del moto, e della quiete sono reciproche, e non esprimono altro che un fatto; e questo è quanto si fa in questo genere.

XXVI.

32. VELOCITA' è quella facoltà d'agire, per cui il corpo si va applicando successivamente da luogo a luogo nel dato tempo; vale a dire, è una relazione, che ha lo spazio scorso al tempo.

COROLLARIO.

33. Può dunque un corpo giungere da un luogo all'altro con varj gradi di velocità; cioè può consumare il dato spazio più presto o più tardi; ovvero può in diversi tempi scor-

PARTE PRIMA, CAPITOLO I. 11

scorrere il dato spazio; e perciò la velocità è indispensabile come il tempo (29.) nella misura dello spazio scorso.

XXVII.

34. QUANTITA' DI MOTO è la velocità; diffusa nella massa, cioè il prodotto della massa nella velocità; essendo evidente, che mentre muovesi un corpo, tutte le sue parti debbono muoversi con l'istessa velocità; altrimenti se alcune si muoveressero più presto, alcun' altre più tardi, il corpo si scioglierebbe, e non farebbe più intero contro l'ipotesi.

XXVIII.

35. FORZA, AZIONE, IMPETO, POTENZA, ENERGIA &c. d'un corpo è quella quantità di moto, ch'egli attualmente esercita, o ch' eserciterebbe, quando tolto gli fosse qualunque impedimento.

XXIX.

36. FORZA MOTRICE è quel principio, qualunque siasi, donde proviene il movimento d'un corpo. Dicesi, comunemente *viva*, quando congiungesi col moto attuale, come in un grave liberamente cadente. Dicesi *morta*, quando consiste nel solo sforzo di produrre il moto senza poter venire al moto attuale, come in una palla sospesa ad un filo, o posta sopra un sostegno.

B 2

MO

XXX.

37. **MOTO EQUABILE** dicefi, quando i corpi poffeggono fempre la medefima quantità di moto; vale a dire, quando la velocità è cofiante.

XXXI.

38. **MOTO VARIABILE** dicefi, quando mutafi la quantità di moto, o coll' accrefcerfi, o col diminuirfi; vale a dire, quando la velocità è variabile.

XXXII.

39. **MOTO ACCELERATO** dicefi, quando la fua quantità, o quando la velocità in un corpo va continuamente accrefcendofi.

XXXIII.

40. **MOTO RITARDATO** dicefi, quando la fua quantità, o quando la velocità in un corpo va continuamente diminuendofi.

XXXIV.

41. **ESTENSIONE** è ciò, che appartiene alla lunghezza, alla larghezza, e alla profondità, tanto unitamente, che feparatamente confiderate.

RE-

XXXV.

42. RESISTENZA è un' opposizione a qualche forza ; ovvero è una potenza , che agisce contrariamente ad un' altra .

COROLLARIO.

43. Dunque ogni resistenza dovrà diminuire , o distruggere affatto l' effetto d' un' altra forza , o potenza .

XXXVI.

44. SOLIDITA' è un' estensione accompagnata con resistenza .

XXXVII.

45. COMPENETRAZIONE direbbesi quando due , o più corpi occupassero congiuntamente quel luogo , che uno di loro può separatamente occupare .

XXXVIII.

46. FIGURABILITA' è una particolar maniera , con cui resta una cosa circonscritta .

Co-

14 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

COROLLARIO.

47. Non può dunque tal carattere competere all'infinito assoluto (17.).

XXXIX.

48. DIVISIBILITA' è il discostamento di più cose poste al contatto.

COROLLARIO.

49. Nè meno questa proprietà può dunque competere all'infinito assoluto.

XL.

50. NUMERO è una moltitudine in generale, o in astratto (15.), che non ha significazione determinata, se non quando si applica a cose particolari, o al concreto (16.).

ASSIOMI, E REGOLE FONDAMENTALI.

I.

51. E' impossibile l'esistenza d' una cosa, che per esistere ammetta contraddizione, e ripugnanza; così non può una cosa essere, e non essere nel tempo istesso; non può esse-

PARTE PRIMA, CAPITOLO I. 15

effere ciò, che è, e ciò, che non è: vale a dire, non può effere una cosa, e nel medesimo tempo un'altra.

S C O L I O.

52. Questo assioma d'Identicità, ovvero (ciò, ch'è il medesimo) di contraddizione, è un principio universale, e incontrastabile, il quale, come avverte il Leibnizio nelle sue riflessioni sull'Intendimento umano di Locke (a), non ha bisogno di prova. Veramente intraprendendo a provare a forza di raziocinio proposizioni riconoscibili per semplice intuizione, si commette una *Tautologia*, cioè si replica inutilmente l'istessa cosa con parole diverse, si fanno petizioni di principio, o s'entra in un circolo vizioso.

II.

53. Niuna cosa può esistere, o accadere, ovvero debbesi ammettere, quando suppone indifferenza, ed eguaglianza di ragioni tanto per l'una, che per l'altra parte; cioè quando le ragioni sono eguali tanto perch'ella sia, quanto perch'ella non sia, e nessuna può prevalere sull'altra.

S C O L I O.

54. Suppongasi ex. gr. per un momento esistere un solo corpo; non si muoverà questo per alcun verso, perchè tante sono le ragioni, per le quali deve muoversi per una par-

(a) *Leibnitii Epist. ad diversos per Christ. I Kortolt. vol. 4. O' ult. pag. 403.*

16 ELEMENTI DI FISICA IMMFCANICA

parte, quante per qualunque altra ; deve dunque necessariamente restare indifferente. Il simile dicasi con Archimede di due corpi eguali egualmente distanti dal loro centro di gravità , e ch' esercitano eguali momenti . Non v' è ragione più per l' uno che per l' altro , per cui seguir ne debba lo sbilancio , perche le medesime ragioni di preponderare , che ha l' uno , sono dalla parte dell' altro . Questo principio, che per promotore ha sortito il celebre Leibnizio , vien da esso chiamato *Ragion sufficiente*. Niuna cosa dunque, eccetto Dio , può aver l' essere effettivo , e reale senza una ragion sufficiente della sua esistenza ; o pure tra l' infinite cose possibili non succederà mai , che una possa esistere preferibilmente ad un' altra , se a suo favore non ha una ragion sufficiente di tal esistenza. Vedasi il Wolfio nell' *Ontologia Latina*, e M. Formey ^(a), per conoscere l' importanza di questo principio , da cui essi pretendono , che provenga anche l' esposto d' identicità , e di contraddizione (§1.).

III.

55. Gli effetti interi sono proporzionali a quelle cause, che agiscono sempre nell' istessa maniera.

COROLLARIO.

56. Dunque le forze, le potenze &c. che operano costantemente , essendo cause di cangiamenti prodotti in un dato

(a) *Mem. de l' Acad. Roy. des Sc.* | 1747. pag. 370. seq.
et bell. Lettr. de Berlin an.

dato tempo, possono esser misurate da questi effetti interi, cioè dalla quantità di moto, che in un dato tempo producono.

IV.

57. Non può essere infinita la serie successiva delle cause immediate, dalle quali vien prodotto un' effetto.

V.

58. Tutto ciò, ch'è contrario ad un'invitta esperienza, è assurdo.

VI.

59. Niuna cosa può aver creata se stessa; e una cosa creata non può dar del suo senza realmente perdere quanto dà; nè può accrescersi, senza prendere altronde con che farlo; altrimenti farebbe creatura insieme, e creatrice, il che ripugna.

VII.

60. Il NULLA ASSOLUTO non ha, nè può avere proprietà alcuna, e però ripugna, che possa esistere.

C

Non

VIII.

61. Non si debbono moltiplicare gli enti senza necessità, nè si deve supporre dall'Autor della Natura fatto per il più ciò, che far potevasi per il meno.

COROLLARIO I.

62. Dunque nella spiegazione degli effetti naturali non si debbono ammettere più cause di quelle, che sono sufficienti a produrli. Anzi, giacche una sola è la verità, non si debbono ammettere in tale spiegazione, se non quelle cause, che vengono comprovate per vere, rigettando non solo tutte le ipotetiche, e visionarie, che ripugnano; ma ancor quelle, che vengono proposte senza previa prova di raziocinio, o di esperienza, quantunque dimostrare non se ne possa la ripugnanza.

COROLLARIO II.

63. La Natura dunque farà sempre semplice, e conforme a se stessa, non ridonderà di cause superflue, e non agirà mai inutilmente.

COROLLARIO III.

64. Quindi non si debbono attribuire a cause generali diverse i medesimi effetti. Ripugna ex. gr., che la Natura per

per far cadere i corpi verso il centro terrestre, qualunque sia il luogo, da cui liberamente discendano, si ferva di cause differenti; onde gli effetti naturali della medesima specie riconoscono l'istessa causa.

COROLLARIO IV.

65. Le spiegazioni dunque de' fenomeni, vale a dire di ciò, che accade in Natura, debbonfi far derivare da cause più generali, che sia possibile, quando vi sia il modo di farlo.

IX.

66. Quando in un gran numero di corpi d'ogni specie posti replicatamente alla prova si trovino costantemente proprietà sottoposte a leggi immutabili, queste proprietà siffar si debbono per universali, appartenenti cioè anche a quei corpi, sovra de' quali non può cadere il nostro esame. Così può dirsi, che gravi siano ancora que' corpi, che sono situati verso il centro terrestre, quantunque far non se ne possa la prova.

COROLLARIO I.

67. Quindi deducesi, quali debbono chiamarsi proprietà particolari, cioè quelle, che competono soltanto ad alcuni corpi in alcune circostanze.

COROLLARIO II.

68. Errore dunque sarebbe il voler render generali quelle proprietà, che ad alcune specie di corpi posti in alcune circostanze convengono; e però deve si far uso cauto dell'analogia, di cui serve si in alcuni casi la Natura, e non generalizzarla senza fortissime ragioni.

X.

69. Nell' esporre la spiegazione di qualunque dubbio deve si evitare con ogni diligenza la realizzazione dell' idee astratte, e delle voci, nel qual difetto non son caduti soltanto i Peripatetici, e gli Scolastici, ma non pochi ancora de' moderni coltivatori della più sana Filosofia. A tal fine conviene usare raziocinj corredati di vocaboli, de' quali si abbia un' idea chiara, e distinta, tralasciando i raziocinj più composti, intralciati, ed oscuri, particolarmente provenienti da un principio torbido, e inintelligibile, i quali per lo più sono soggetti a tal realizzazione, e in conseguenza a qualche equivoco, o a qualche sofisma; essendo più lodevole il confessare ingenuamente di non saper la causa d' un effetto, che il buttar si all' impostura con fraudolenti, e misteriosi discorsi, o per acquistar fama, o per favorire troppo appassionatamente un partito, o per secondare uno spirito di contraddizione proveniente da invidia, come pur troppo suole non di rado accadere.

Quan-

XI.

70. Quando una Proposizione è dimostrata esattamente, secondo tutte le buone regole, non se le può negare l'assenso per la ragione, che se le possano opporre alcune difficoltà, le quali non siano solubili, o per mancanza d'ulteriori cognizioni, o per esserne totalmente inaccessibile la soluzione; purché non ne sia manifesta la falsità.

S C O L I O.

71. In fatti ciò, che è dimostrato esattamente, è evidente, e in conseguenza una verità (7.); or siccome la verità non può aver mescolanza alcuna di falsità, ne segue, che qualunque obbiezione, che ci renda insolubile un fenomeno, o molti ancora da tal proposizione non immediatamente dipendenti, non deve ridondare, se non in colpa del nostro spirito, che essendo limitato, non è capace di saper tutto. Ex. gr. dimostrato che io abbia, che l'aria pesi, e che sia elastica, non sono obbligato per conferma di questa verità a sapere a quanto ascenda la sua forza di elasticità, o qual ne sia la causa, ovvero fino a quanto ess'aria sia rareficibile dal calore, e condensabile dal freddo &c. Nel medesimo modo non sono obbligato a sciogliere tutte le obbiezioni contro la detta Proposizione; tanto più se faranno fondate sovra supposti gratuiti. In fatti se vi fosse tal obbligo, siccome le obbiezioni possono essere interminabili, una verità non giungerebbe mai ad esser perfettamente dimostrata.

Ma

XII.

72 Ma quando da una Proposizione si tireranno conseguenze, le quali facciano una chiara riprova d' errore, o di contraddizione, si dovrà negar l' assenso alla dimostrazione d' una tal Proposizione, quantunque sembri concepita con tutta l' esattezza.

S C O L I O.

73. Eccone un esempio tolto dalle Matematiche. Sia l' Ellisse AB, il di cui semiasse maggiore, come nella Fig. 1.; o minore, come nella Fig. 2., sia AC, ed il centro C. Da questa col raggio CA descrivasi il quadrante circolare ADC, e sull' asse AC si applichino verticalmente le PM, pm , PN, pn , terminate le prime alla curva Ellittica, le seconde alla circolare. Per la natura dell' Ellisse, e del Cerchio s' ha l' analogia $DC:BC::NP:MP::np:mp$, e così sempre; dunque per gli Elementi tutte le applicate del quadrante circolare, cioè tutta l' area ADC, a tutte l' applicate del quadrante Ellittico, cioè a tutta l' area ABC, faranno in ragione costante, cioè come DC a BC. Suppongasi ora, che tutte l' ordinate suddette si rotino intorno all' asse AC; è manifesto, che da queste rette si descriveranno innumerabili cerchj, che comporranno la solidità emisferica, e conoidea, le quali in conseguenza staranno fra loro come $\overline{DC}^2:\overline{BC}^2$; cioè starà l' emisfero alla conoide ellit-

ellittica, come il quadrato dell' asse maggiore ellittico, al quadrato dell' asse minore nel primo caso, e viceversa nel secondo; il che s' accorda perfettamente con la misura, che può trovarsi con altri metodi, che s' esporranno.

Or s' è vero, che quelli cerchj innumerabili formino le dette solidità, dovrà essere egualmente vero, che le loro estremità, cioè le loro periferie, mettano insieme le superficie d' essi solidi; onde tali superficie dovranno nascere dalla rotazione de' punti D, N, n, B, M, m &c. descriventi nel loro giro innumerabili periferie circolari; ma queste periferie circolari sono proporzionali a' loro rispettivi raggi; dunque anch' esse dovranno star fra loro in una ragione costante, e perciò la superficie emisferica nata dalla rivoluzione del quadrante circolare ADC, starà alla superficie conoidale risultante dalla rivoluzione del quadrante ellittico ABC, amendue intorno l' asse AC, come la DC alla BC.

Questa dimostrazione sembra esattissima all' evidenza; ma se qualcheduno si prenderà il pensiero d' esaminarne il risultato, troverà esserne erronea la misura, e non istare le dette superficie nell' esposta ragione; tanto più che se questa fosse vera, ne verrebbe facilmente sì la rettificazione di qualunque arco circolare, e in conseguenza la quadratura di qualunque dito settore di cerchio, come ancora la rettificazione della Parabola Apolloniana, e in conseguenza la quadratura dell' Iperbole pure Apolloniana ^(a); misure, che passano almeno co' metodi, presentemente noti per disperate, ed in specie la quadratura del cerchio ^(b). Tutto questo ho det-

to

(a) *Vedasi Hugen. Operavaria* T. 1. *Holog. Ostill. Prop.* 9. pag. 103. *Lugd. Bat.* 1724.

(b) *V. Joh. Bernoulli Opera omnia* T. 4. n. 170. pag. 172.

24 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

to, perchè quantunque sia il presente Assioma per se evidentissimo, non viene nondimeno talora atteso, o per negligenza, o per prevenzione.

COROLLARIO.

74. Per assicurarsi dunque della verità d'un Teorema; è bene il procurare di dimostrarlo in più maniere, per vedere, se regge alla riprova, e se tutte le conclusioni cospirano nel medesimo fine. Devesi ancora tentarne la dimostrazione inversamente quando sia possibile; adoprare in somma, per servirmi de' termini Logici, il metodo analitico egualmente, ed il sintetico; e se questi ben maneggiati vengono all'istessa conclusione, non v'è più obbligo di maggiormente assicurarne la verità.

SUPPOSIZIONI.

I.

75. La Materia è mobile.

II.

76. La Materia è estesa.

III.

77. La Materia è resistente.

La

IV.

78. La Materia è figurabile.

V.

79. La Materia è divisibile.

S C O L I O.

80. Tutto ciò insegnaci una continua immancabile esperienza fin dall'infanzia; onde conviene per necessità concederne almeno l'apparenza. Si vedrà in seguito, se questi caratteri faranno tutti realmente veri, o se ve ne sarà qualcheuno affatto apparente. Circa al moto niuno in oggi ne dubita. Tra gli Antichi andavano in giro contro la sua esistenza varj sofismi. Diodoro Crono faceva il seguente. Ciò, che si muove, o si muove nel luogo, dove è, o nel luogo, dove non è. Se il primo, non esce dal luogo, che occupa, e perciò non si può muovere; se il secondo, ne viene un manifesto impossibile; dunque non si dà il moto. A questo ragionamento è molto facile il rispondere; perchè il corpo non si muove nel luogo dove è, nè in quello dove non è, ma successivamente da luogo a luogo (24.). Venne peraltro molto a proposito un'occasione, in cui il detto Filosofo restò convinto; poichè ricorso, per esserseli slogata una spalla, al Medico Ermosilo, questi li rispose, facendoli lo stesso argomento, che tal pretesa slogazione era impossibile; ma Diodoro Crono, vinto dal dolore lo pregò, che, lasciate tali arguzie, li riponesse la spalla smossa al suo luogo.

D

Me-

26 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

Melisso Scolaro di Parmenide persuaso, che un corpo non si poteva muovere senz'ammettere il vuoto, e non potendo concepirlo, si buttò a negare addirittura il moto, facendo prevalere il raziocinio all'evidenza.

L'argomento più famoso era quello, che faceva Zenone, ed a cui dava il nome d'Achille. Egli supponeva, che una Testuggine, ed Achille lontano un miglio: da essa si partissero amendue nell'istesso tempo per arrivare a un termine prefisso, ma che Achille si muovesse con una velocità cento volte maggiore, e sosteneva, che Achille non avrebbe mai raggiunto la Testuggine; imperciocchè mentre Achille avesse descritto un miglio, la Testuggine non ne avrebbe consumato, che una centesima parte, e quando il primo avesse scorso questa centesima, il secondo ne avrebbe trapassato una centesima di centesima; onde andando avanti con tal progressione all'infinito, la Testuggine avrebbe sempre fatto in tempi eguali un viaggio cento volte minore d'Achille, il quale in conseguenza non avrebbe mai potuto raggiungerla. A questo ragionamento più sottile, e più ingegnoso de' precedenti, che sembra distruggere l'idea, che abbiamo del moto, e per sciogliere il quale gli Scolastici hanno scritto interi Trattati, si risponde in oggi molto facilmente, dimostrandosi per la dottrina delle serie, che Achille avrebbe raggiunto la Testuggine dopo d'aver fatto un miglio, ed una novantanovesima parte di esso. Tali sofismi possono leggerli in Plutarco ^(a), e in Sesto Empirico ^(b) più per curiosità, che per utile.

CA.

(a) *De placitis Philosophorum lib. 1. cap. 19.*

(b) *Adversus Mathem. lib. 9. de mo-*

tu; Adversus Phys. lib. 1. Hypothyposis Pyrrhon. lib. 2. Cap. 22. & lib. 3. Cap. 8.

CAPITOLO SECONDO

De' Caratteri generali della Materia.

PROPOSIZIONE I.

81. **L** *A Materia è impenetrabile.*
 Se si compenetrasse, ogni sua porzione, ovvero ogni corpo, di qualunque volume si concepisse, si potrebbe ridurre in uno spazio minore d'ogn' assegnabile (45.); ma ciò ripugna ad un' invitata esperienza; dunque (58.) è manifesta la Proposizione.

S C O L I O I.

82. Mescolandosi due fluidi, vedesi diminuirsene bene spesso, e talvolta accrescersene il volume totale, come può riscontrarsi dall' Esperienze del celebre M. de Reaumur ^(a), come ancora da quelle di Haan, e di altri da quest' Autore riportati ^(b); Ciò per altro non si oppone alla verità della presente proposizione, perchè in ogni tal mescolanza le condensazioni, o le rarefazioni de' miscibili hanno un limite particolare; segno evidente, che ciò non procede dal-

D 2

la

(a) *Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc.* an. 1733.

(b) *Diff. de efficacia mixtionis in mutandis corporum voluminibus.*

28 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

la materia, che si va compenetrando, o che compenetrata va rarefacendosi, ma da alcune circostanze molto diverse, che fanno da' Fisici, e che non è questo il luogo d' esaminare. Aggiungasi, che tali fenomeni non succedono nella mescolanza di qualunque corpo con un' altro, ma d' alcuni soltanto, i quali perciò suppongonsi con tutto il fondamento dotati di qualche particolar proprietà. Il medesimo dicasi de' corpi, che crescono di peso per mezzo della calcinazione; sovra di che merita d' esser letta la Dissertazione del P. Beraut Gesuita inserita nel Magazzino Toscano (a).

S C O L I O II.

83. Alcuni Filosofi, particolarmente Newtoniani, confondono l'impenetrabilità, e la solidità; o pure deducono immediatamente questa da quella. Altri suppongono addirittura la solidità, come un carattere intrinseco, e necessario della materia; ma prima di poter ciò stabilire, parmi, che vi siano de' passi di mezzo da fare, convenendo dimostrare l'insufficienza d'alcuni Sistemi, co' quali i loro Autori pretendono provare, non esser altro la Materia, ch' Enti inestesi, e senza parti, o punti simili al punto matematico &c., a i quali regalano gratuitamente varie proprietà, per poi dedurre la spiegazione de' fenomeni, che osservansi in Natura. Rigettati tali Sistemi, allora ne può venir la conseguenza legittima, che la materia sia solida per natura. Sia pertanto.

PRO-

(a) *Tomo 1. pag. 196. e seg.*

PROPOSIZIONE II.

84. *Enti semplicissimi, privi totalmente d'estensione, non possono con la loro unione formar la Materia.*

Se di tali Enti fosse composta la materia, ogni molecola elementare, da cui risulta un corpo, verrebbe formata da due, o più Enti messi insieme; in conseguenza non vi sarebbe corpo, che alternativamente non fosse risolubile in essi. Mi si dovrà dunque concedere, ch'io possa supporre una molecola, o porzione corporea dell'estrema piccolezza, la quale divisa per l'ultima sezione cessi d'esser materia, risolvendosi in due de' menzionati Enti semplici. Non mi si potrà in oltre negare, che per formar di nuovo, o ricomporre detto piccolissimo corpicello, basti riunire i detti due Enti semplici separati. Si riuniscano adunque; dovranno, benché inestesi, produrre estensione, col fare scaturire dal loro accoppiamento il detto corpicello. Preso pertanto un punto fisso nel loro attacco, vi dovrà esser da destra, e da sinistra il carattere di commenfurabilità; altrimenti il corpo natone, non essendo esteso, nè figurabile, &c., non farebbe corpo (76.78.); ma i due Enti accoppiati non possono essere nell'atto del loro combaciamento, se non della medesima natura di prima, giacche la sola mutazione di luogo non può nulla influire sulla loro essenza; dunque faranno nel tempo stesso estesi, ed inestesi; figurabili, e non figurabili &c., il che è una contraddizione ne' termini. Il medesimo vale, se più di due Enti v'abbisognino per la formazione d'un corpuscolo. Aggiungasi, che essendo inestesi, do-

dovranno ancora esser penetrabili, posto, che vengano uniti insieme, ovvero che si tocchino; poichè non essendo a tal compenetrazione impedimento alcuno, ella deve necessariamente seguire; sicchè un numero anche infinito di essi non giungerebbe mai a formare un corpuscolo minore d'ogni assegnabile. Resta dunque (51.81.) dimostrata la Proposizione.

S C O L I O.

85. L'illustre Leibnizio inteso sempre a segnalarsi con qualche bizzarro letterario progetto, per dimostrare l'esistenza delle mostruose sue *Monadi*, si servì d'un raziocinio simile a quello, che leggesi nel famoso Locke riguardo all'estensione. „ Se taluno (questi dice) mi dimanda, cos'è „ questo spazio, di cui favello, io son pronto a dirglielo, „ quand'egli mi dirà, cos'è l'estensione. Poichè il dire, „ come per l'ordinario suol farsi, che l'estensione consiste „ in avere *partes extra partes*, è l'istesso che dire, che „ l'estensione è estensione „ &c. (a). Così il Leibnizio domanda, di che cosa è composta la materia? A risponderli, ch'è composta di particelle materiali, si viene a dire, egli segue, che la materia è composta di materia, il che è il medesimo che non dir nulla.

Pretende egli dunque con la sua *Ragion sufficiente* alla mano (54.), che non si possa trovar ragion d'un Ente esteso, e composto, se non in Enti semplici, ed inestesi nel modo medesimo, che per provar la possibilità d'un'orologio, bisogna venir a cose, che non siano orologio,

Da

(a) *Entend. Hum. liv. 2. Chap. 13. §. 15.*

Da questo principio deduce, che per conoscer la materia, bisogna ricorrere a ciò, che non è materia, cioè ad Enti semplici, privi affatto d'estensione, e quest' Enti arbitrarj chiama col suddetto nome di *Monadi*. In occasione che l'Accademia Reale delle Scienze, e Belle Lettere di Berlino propose per soggetto del premio dell'anno 1747. l'esame di queste *Monadi*, molti furono ad esse contrarj, tra' quali il famoso Matematico Eulero (*), sembrando anch'ad esso repugnante la loro esistenza. Parmi per altro, che si possa con tutta giustizia dubitare, o che il medesimo Leibnizio tenga per falsa questa sua Ipotesi, o che si contraddica; imperciocchè io non credo, che vi sia persona, la quale mi neghi, che Enti senz'estensione, non siano tanti infinitamente piccoli pretti, e reali; ma una quantità infinitamente piccola presa in senso stretto filosofico è al parere del medesimo Leibnizio una pura, e pretta finzione (b); dunque o egli propone soltanto per bizzarria le *Monadi*, e però non ne crede l'esistenza; o pure si contraddice. L'Ellero al contrario (c) non potendo concepire le *Monadi* Leibniziane, che chiama punti Metafisici, pretende con altrettanta stravaganza, che sia più facile il comprenderle sotto Enti semplici materiali non estesi, l'unione de' quali abbia potuto formare particelle corporee, e in conseguenza estese. Ma questa ragion sufficiente parmi, con pace de i Leibniziani, in questa occasione male impiegata; primieramente perche si rag- gira sovra un supposto non provato, e forse falso, come si

ve-

(a) *V. Journ. des Sav. avril 1748.*
p. 465. *Edis. d'Amsterdam.*

(b) *Essai de Théodicée* §. 70.

(c) *Mem. de l'Acad. Roy. des Sc. &*
Bell. Lettr. de Berlin. an. 1746.
Diff. seconde sur les Elements.

vedrà in appressò, cioè che la materia sia per natura composta, o mista. In fatti il dire col Leibnizio (a), che è composta, perchè flessibile, e divisibile, non è prova sufficiente; bisogna provare, che questa flessibilità, e questa divisibilità non sono apparenze, e per provarlo bisogna far vedere, che la flessibilità non può procedere da' corpi duri sdruciolanti l'uno sull'altro, o l'uno dall'altro discostantisi; e che la divisibilità succeda non da un semplice scostamento di detti corpi duri, ma da una divisione a tutta sostanza. In secondo luogo, se la ragion sufficiente s'impiega direttamente per giungere dal corpo alle Monadi, si deve potere anche invertamente adoprare, per ritornare dalle Monadi al corpo (74.). Or se domando a' Leibniziani, qual sia la ragion sufficiente, per cui Enti inestesi, e senza parti debbano uniti insieme formar parti, ed estensione, essi certamente non potranno fare a meno di confessare di non saperla, nè di poterla intendere col menzionato Eulero; ma io ho dimostrato, se non m'inganno, che il raziocinio inverso non regge (84.); dunque erroneo deve esser nel presente caso anche il diretto, quantunque apparisca sotto la larva di verisimiglianza (72.73.); e però il metodo della ragion sufficiente è stato, torno a dire, male impiegato, come quello, che sonda sopra un supposto non dimostrato, e che, se non erro, non proveranno giammai. Passiamo adesso ad un altro somigliante Sistema, ma prima si premetta

LEM.

(a) *Epist. ad diversos per Christ. Kortholt.* | Vol. 4. & ult. pag. 407.

L E M M A I.

86. *Non è possibile l'esistenza d'una quantità, che sia un infinitamente piccolo assoluto.*

A voler, ch' esista un infinitamente piccolo assoluto, bisogna supporre, che questo sia l'ultimo termine d'una serie successivamente decrescente all' infinito; perchè se non fosse l'ultimo termine, ve ne farebbero de' più piccoli, contra l'ipotesi; ma repugna, che si termini l'interminabile (51.); dunque è manifesta la Proposizione.

C O R O L L A R I O.

87. GL' INFINITAMENTE PICCOLI, O INFINITESIMI de' Matematici sono dunque tutti relativi (13.); potrebbero per altro chiamarsi più giustamente *inassegnabili*, come quelli, che vengono supposti d'una piccolezza tale, che trascenda la piccolezza di qualunque misura, di cui si possa far uso.

L E M M A II.

88. *Dall'estensione all' inestensione passa una disparità, che non ha rapporto possibile.*

Se si desse il passaggio dall'estensione all' inestensione, non vi farebbe altro compenso, che supporre l'estensione divisibile all' infinito; ma per quanto dividasi mentalmente un'estensione in parti decrescenti, e ciò successivamente all' infinito, è chiaro, ch'ogni porzione di tal serie, come
E par-

34 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

parte d'estensione, farà sempre estesa ancor' essa; onde l'estensione non potrà mai giungere ad essere inestensione, se non venga con la replicata sezione affatto distrutta; cioè se non diventi in qualche sua parte un infinitamente piccolo assoluto, giacche non può questo concepirsi, se non inesteso; Ma l'infinitamente piccolo assoluto non è possibile (86.); dunque l'estensione per quanto si diminuisca, non può divenire inestensione, e però tra l'estensione, e inestensione è impossibile il rapporto; il che &c.

PROPOSIZIONE III.

89. *Quando si concedesse, che esistessero punti reali simili a punti matematici, cioè senz'estensione, i quali punti per salvar la compenetrazione non potessero giammai per un impedimento qualunque giungere a roccarsi, ma che con lo stare avvicinati in varj volumi formassero i corpi; dico, che non si potrebbe dare in essi moto alcuno, e perciò sarebbe il lor sistema insostenibile.*

Immaginiamoci, che un punto, cioè un Ente inesteso abbia, se pure è possibile, scorsa col moto (24.) una distanza qualunque: egli sarà passato successivamente per tutte le possibili intermedie porzioni di essa; ma queste porzioni non rimangono se non estese, quantunque la detta distanza suppongasì divisibile all'infinito (86.); dunque un tal punto avrà dovuto nell'addotto caso adattarsi sempre sovra porzioni di distanza, cioè sovra porzioni estese (41.); ma il punto si suppone realmente inesteso; dunque una cosa inestesa si sarebbe replicatamente distesa, e adattata sovra un'estensione.

sione, e però tra 'l punto, e l'estensione vi sarebbe commensurabilità, e rapporto; il che è falso (88.); dunque il punto in questione non può scorrer col moto, cioè con la continua e successiva applicazione di estensione a estensione, una distanza qualunque finita, per quanto piccola voglia immaginarsi, e perciò non può esser giammai suscettibile di moto alcuno; ma ciò, che s'è detto d'un solo punto, si può dire di due, e di più altri; tantopiù, che per esser sempre l'uno dall'altro in qualche distanza, le circostanze considerate in uno vagliono per tutti gli altri; dunque è manifesta la Proposizione.

S C O L I O.

90. Autore dell' addotto sistema è il celebre P. Boscovich; questo valente Geometra pretende, che fin dall'infanzia, ed anche fin dal tempo, in cui dimoriamo nell'alvo materno, c'ingannino i sensi col farci apparire la materia ben diversa da quello, ch'ella è realmente, presentandocela all'immaginazione come dotata di solidità; qual pregiudizio resta in seguito in noi confermato per la costante introduzione della medesima idea, se non facciamo un uso debito della riflessione. Egli dunque crede, che giunti ad un'età capace di riconoscere i pregiudizj dell'infanzia, posta all'esame ogn'origine delle nostre idee, e costituito l'animo in un'intera indipendenza, ci debba saltare agli occhj, che non v'è il minimo inconveniente a supporre, che la materia consisti di punti totalmente indivisibili, privi d'estensione, e di parti. Per concepir poi tali punti, soggiunge, che ci può

E 2

fer-

36 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

servir di guida il punto matematico. *Punctorum mathematicorum idea, quam nobis in Geometria efformamus, opem ferret* (a). Ma il pretendere, che noi concepiamo Enti inestesi reali per la ragione, che passiamo sovra il punto matematico, allorché ascoltiamo i Geometri, è un abusarsi della nostra condescendenza prestata a solo fine di lasciar fare ad essi il lor giuoco, qual è la misura dell'estensione; tanto più che non porta a nessuna conseguenza per il fine prefisso il conceder loro il punto indivisibile, e inesteso, il quale per altro vien giudicato da chi ben vi riflette un ripiego per *metodo*, e per *comodo*. Per *metodo*, perche pretendendo i Geometri di passare consecutivamente da una cosa all'altra, e concatenando così le loro idee astratte, per poi applicarle al concreto, hanno fissato il punto inesteso, il quale col flusso produca la linea, ch'è una lunghezza senza larghezza; così la linea scorrendo sovra un'altra linea, forma la superficie, ch'è una larghezza accompagnata dalla larghezza senza profondità; e finalmente la superficie, collo scorrere sulla linea, produce il solido dotato di lunghezza, larghezza, e profondità; in grazia adunque di venire per conseguenze alla nascita della linea, della superficie, e del solido, hanno fissato per primo elemento il punto inesteso. Per *comodo* poi l'hanno anche supposto tale, perche hanno voluto schivare ogni contrasto, allorché ex. gr. hanno avuto bisogno di tirare una linea da un punto ad un altro; perche se il punto avesse avuto estensione, bisognava fissare da qual parte di tal esten-

(a) *Dissert. de materia divisibilitate & principiis corporum.* §. 17. V. Mem. sovra la Fisica, e Istoria naturale

di diversi Valentuomini T. 4. pag. 161.

estensione si doveva cominciare a condurre la detta linea. In oltre se il punto fosse stato esteso, la linea sarebbe stata prodotta non tanto lunga, quanto larga, ed eccoci ad altri inconvenienti, che s'attraversavano al loro fine, qual era di considerare alle volte una sola distanza, vale a dire una sola lunghezza, una sola larghezza, o una sola profondità, senza pensare nell'atto medesimo ad altre dimensioni. Vedendosi dunque qual sia stato il fine di supporre il punto ineseso, cioè il metodo, e il comodo, non parmi legittima induzione di pigliar motivo da una cosa non solo totalmente chimerica, ed inintelligibile, ma anche impossibile, per concepirne, e stabilirne una simile, che non solo si vuol possibile, ma realmente esistente.

91. Nemmeno so come possa il sovrallodato Autore supporre con altri (*), che il punto col flusso continuo generi la linea, la quale non sia composta di punti, ma che sia terminata da i punti. In fatti niuno può negare, che la linea non sia composta; altrimenti ella farebbe le veci del punto, cioè del primo elemento nel Mondo matematico; dunque o è composta d'altre linee, o di punti; il primo è un supporre ciò, ch'è in questione; dunque farà vero il secondo. Ma ecco un altro scandalo; se la linea è composta di punti, saranno questi posti l'uno accanto all'altro; or se ciò fosse, si verrebbero a compenetrare per essere inesesi, e non potrebbero in conseguenza produrre la linea. Nemmeno si può concepire, che il flusso del punto generi la linea, se egli non vassi, per così dire, continuamente squagliando per il lungo, ed allora non sarebbe più ineseso; il
so-

(*) V. Pietro de Martino *Phil. Nat.* | *Instit. lib. I. Cap. VI. §. 108. pag. 57.*

38 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

solo patteggio del punto non può nemmeno formar la linea, come il moto d'una palla di legno non può formare il bastone. Aggiungasi, che non si può accordare, ch'una cosa inestesa sia capace d'un continuo successivo combaciamento con ciò, ch'è esteso (89.); ovvero ripugna, che ciò, ch'è inesteso, produca l'estensione, giusta l'antico verissimo assioma, *nemo dat quod non habet*. Sia poi la linea non composta di punti, ma terminata da' punti; siccome il fluffo d'un solo punto è quello, che la produce, bisognerà dire, o che il punto generi un altro punto a se eguale, e ciò nel fine del suo moto, e non altrove; ovvero ch'esista in due luoghi diversi tutt'alla volta; amendue inconvenienti (59.25.).

92. Mi farà opposto, che il Cav. Newton, con i moderni Geometri considera la linea costante di linee, la superficie di superficie, il solido di solidi. Al che rispondo, che altro è dividere un solido, una superficie, una linea in parti omogenee inassegnabili per comodo di calcolo, altro è ricercarne la genesi. Nel primo caso quando si dice, che la linea consta di piccolissime linee, la superficie di piccolissime superficie, il solido di piccolissimi solidi, si considerano queste quantità come tali, a fine d'adattarvi il metodo degli evanescenti, il quale fondamentalmente non differisce dal metodo degl'Indivisibili (a), come farò vedere in progresso. Nel secondo caso non si pensa più al comodo del calcolo, ma

(a) V. M. Deidier nella Prefazione all'Opera intitolata: *la Mesure des Surfaces & des Solides par l'Aritmetique des infinis & les centres de gravité.*

La Mechanique générale livre I. Chap. III. §. 56.
Lecchi Elem. Geom. Theor. & Pract.
T. 2. pag. 185. seg.

ma ad una serie successiva di produzioni; ed allora il dire, che la linea è composta di linee, la superficie di superficie, il solido di solidi, è il medesimo, che non dir nulla, come nulla si direbbe, pronunziando, che il punto consta di punti.

93. Se poi mi fosse richiesta la definizione del punto matematico, io direi col Newton; il punto è una quantità per ogni verso evanescente; ovvero una quantità la minore per ogni parte d'ogni assegnabile (87.), e perciò si può riguardo al nostr'uso fissare come ineitesa, quantunque per se stessa realmente contenga estensione; ed allora cesserebbero le risse, e s'intenderebbe assai meglio come potesse nascerne, o la linea, o la superficie, o il solido; imperciocchè fissato, che il punto debbasi concepire come una quantità estesa per le tre dimensioni, ma d'un'estensione affatto inassegnabile per ogni verso, la linea; ch'è composta di tali punti posti l'uno accanto all'altro, consisterà d'una lunghezza assegnabile, e d'una larghezza, e profondità inassegnabili; la superficie, che vien formata dall'unione di linee innumerabili poste l'una accanto all'altra, risulterà di lunghezza, e larghezza ambe assegnabili, e d'una profondità inassegnabile il solido, che proviene da innumerabili superficie combaciantisi esattamente, possiederà le tre dimensioni, cioè lunghezza, larghezza, e profondità, tutte assegnabili.

94. Se fosse obbietato, che tal definizione riguarda più il punto fisico, che il matematico; rispondo, che la quantità matematica non differisce dalla fisica, se non in prescindere da ogn'altra proprietà, che può competere alla materia, ritenendo soltanto l'estensione; in fatti le figure matematiche non sono state immaginate, se non coll'innanzi
del

40 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

del corpo fisico, e questo a fine di stabilire le regole della dimensione, per poi adattarle al materiale. Posto ciò, è chiaro, che alstraendo dal punto fisico ogn' altro carattere, fuorchè un' estensione per ogni verso egualmente inassegnabile, si viene addrittura alla fissazione del punto matematico.

95. Ma ritornando in via, concludo, che non essendo in senso stretto nè concepibile, nè possibile il punto matematico realmente inesteso, e dovendo questo servir d'ajuto a comprendere i punti Boscovichiani, tali punti non saranno per questo verso nè concepibili, nè possibili. Siccome poi questo sistema è una pura Ipotesi, non meriterebbe, come tale, maggior riflessione (62.); ma il suo illustre Autore pretende dimostrarne anche direttamente la verità, e ciò per un principio messo in campo anche da altri, voglio dire per la *Legge di Continuità*. Mi riserberò dunque a far vedere a suo luogo, che questo principio è, riguardo al moto, e alla quiete, insufficiente. Chi poi vuol vedere il detto sistema nella sua estensione, può rincontrarlo in varie Opere del dottissimo Autore, come nella *Dissertazione de Lumine*, in quella *de materiae divisione, et principiis corporum*; nell'altra *de Lege Continuitatis, &c.*

PROPOSIZIONE IV,

96. *La Materia è solida.*

La Materia è impenetrabile (81.), in conseguenza è resistente (42.); non risulta d' esseri inestesi (84.89.), e perciò è realmente estesa; ma l'estensione accompagnata con
re.

resistenza è ciò, che chiamiamo solidità (44.); dunque la materia è solida; il che &c.

PROPOSIZIONE V.

97. *La Materia è indifferente tanto al moto, ch' alla quiete.*

Se la materia tendesse al moto, non vi farebbe corpo, che posto sovra un piano ben levigato non si muovesse spontaneamente, e in conseguenza non si darebbe quiete, se non coartata, il che è falso.

Se la materia tendesse alla quiete, non si potrebbe trasportare un corpo da un luogo a un altro col solamente forregarlo, perchè si muoverebbe spontaneamente verso quel luogo, dove trovavasi in quiete, il che è contrario all' esperienza.

Dunque, essendo la materia suscettibile tanto di moto, che di quiete, e non tendendo spontaneamente, allorchè si trova in uno di questi due stati, allo stato opposto, ne segue, ch' essa è indifferente all' uno, ed all' altro; il che &c.

PROPOSIZIONE VI.

98. *La Materia per se stessa deve rimanere in quello stato, in cui trovasi, o di moto, o di quiete, fintanto che da una causa, qualunque siasi, non ne venga rimossa.*

1.) Supposta la materia in quiete senza verun agente, che la disturbi, siccome non v' è ragione, per cui debba muoversi più per un verso, che per un altro, deve neces-

F. fa-

42 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

ariamente rimanere nel suo stato d'immobilità (53.54.).

2.) Supposta in moto, siccome per l'ipotesi non v'è causa, nè ragion veruna, per cui debba mutar direzione più per una parte, che per un'altra, e siccome è indifferente al moto, e alla quiete, dovrà mantenere costantemente la detta direzione, e il moto, che possiede.

3.) Che se sopraggiunga qualche causa sufficiente ad alterare queste situazioni, è manifesto per la sua natural disposizione alla mobilità (75.), e per la sua impenetrabilità (81.), che dovrà necessariamente seguirne il cangiamento, come in fatti succede; con che resta dimostrata la Proposizione.

S C O L I O.

99. Che la materia debba perpetuamente mantenersi nello stato di quiete, quando non vi sia causa, che da tale stato la rimuova, lo dimostra anche l'esperienza. Parimente, che la materia debbasi perpetuamente mantenere nello stato di moto equabile, quando da qualche causa non resti alterata, riscontrasi da un corpo mosso sopra un piano levigato; imperciocchè è osservazione immancabile, che quanto maggiore sarà tal levigatezza, tanto più lungamente il corpo conserverà lo stato del suo movimento; proseguendo dunque in tal guisa il discorso, quando il piano fosse perfettamente levigato, il moto per esso si manterrebbe uniforme, e perpetuo; ma lo spazio fa le veci d'un piano perfettamente levigato; dunque un corpo messo in moto nello spazio senza l'incontro di cause perturbatrici dovrà invariabilmente perpetuarlo.

Co-

COROLLARIO I.

99. b. Dunque un corpo nel rimanere immobile nello spazio, vi resta indifferente ad ogni direzione, e però non esercita da se solo forza alcuna per mantenersi; il che dimostra, che la sola quiete non può mai passare per una forza, come credeva il Des-Cartes.

COROLLARIO II.

100. Giacche un corpo, che muovesi per una Curva, deve mutare ogni momento direzione, è manifesto, che richiedesi a tal fine più d'una forza operante per direzioni diverse, e che in conseguenza non può un solo agente produrre un tal effetto.

PROPOSIZIONE VII.

101. *Supposta la Materia divisibile all' infinito, non si potrà supporre attualmente divisa in infinito senza annichilarla.*

Se dopo tal divisione la materia esistesse, non sarebbe più divisibile in infinito contro l'ipotesi; ma non può nemmeno ridursi in tal caso in ciò, che non è materia, vale a dire in Enti semplici, ed inestesi (84. 89.); dunque non potendo dopo tal divisione restare nè materia, nè ciò, che è atto a ricomporla, deve necessariamente rimanere annichilata; il che &c.

PROPOSIZIONE VIII.

102. *Supposto possibile un numero realmente infinito di corpi esorbitantemente piccoli quanto si voglia, dico, che questo non potrà star racchiuso in un luogo circoscritto.*

Non può darfi l'infinitamente piccolo assoluto (86.); dunque un corpicello per quanto piccolo si voglia ammettere, farà sempre materia (84. 89.), e però farà esteso (76.); ma è anche impenetrabile (81.); dunque adunato un numero finito di corpicelli, formerà un volume maggiore in parità di circostanze di quello, che forma un altro adunamento di minor numero; e così in seguito. Or siccome il maggior numero al vicendevol contatto genera sempre a cose pari maggior volume, ne segue, che supposto possibile un numero realmente infinito di tali corpuscoli, produrrebbe necessariamente un volume per ogni verso infinito; ma un tal volume infinito non può esser raccolto in un luogo limitato; dunque è manifesta la Proposizione.

PROPOSIZIONE IX.

103. *La Materia non è divisibile in infinito.*

Se negasi, sia divisibile in infinito. Avrà dunque come tale tutti i luoghi, ne quali sarà divisibile, altrimenti non lo sarebbe contro l'ipotesi; ma è per natura estesa (76.), impenetrabile (81.), e solida (96.) e però costante di parti solide al contatto l'una dell'altra; dunque sarà un'unione di parti contigue estese, impenetrabili, e solide l'una fuo-

fuori dell' altra; ma la divisibilità si suppone all' infinito, ed infiniti sono in conseguenza i luoghi, ne' quali è divisibile; dunque tali parti solide contigue faranno di numero infinito; ma ciò succederebbe in ogni corpo, ed ogni corpo è circoscritto; dunque 1.) o esisterebbe in materia l' infinitamente piccolo assoluto; 2.) o la materia esisterebbe con infinite divisioni (giacchè la contiguità non le toglie), cioè farebbe divisa all' infinito senza cessar d' esser materia, vale a dire senza annichilarsi; 3.) o un numero infinito di eguali parti solide per natura farebbe compreso in un luogo limitato; tutti e tre inconvenienti (86. 101. 102.); dunque è manifesto l' assunto.

DEFINIZIONE XL.

104. **COMPOSTO** è ciò, che necessariamente consta di parti, vale a dire che è risolubile ne' suoi componenti.

DEFINIZIONE XLI.

105. **INCOMPOSTO** è ciò, che non avendo chi lo componga, è in conseguenza irreducibile in componenti, cioè non ha parti effettive, che stando in qualunque modo al contatto reciproco, ne formino il tutto.

COROLLARIO I.

106. Dunque ciò, che è incomposto, è di sua natura indivisibile al contrario di ciò, che è composto, il quale è di sua natura divisibile.

Co-

COROLLARIO II.

107. Viceversa ciò, che è divisibile, è composto; altrimenti se fosse incomposto, farebbe indivisibile.

PROPOSIZIONE X.

108. *La Materia non è sostanzialmente divisibile, nè limitatamente, nè illimitatamente.*

O la Materia presa sostanzialmente è incomposta, o composta. Se il primo: ella è di sua natura indivisibile (106.); se il secondo: risulterebbe di parti poste al contatto, tanto più che è impenetrabile (81.). Or io domando, queste parti sono materia, o non materia? Se mi si risponde, che sono materia, si viene a dire, che la materia sia per se stessa, cioè sostanzialmente, composta di materia, il che non vuol dir nulla (85.). Se mi si replica, che non sono materia, ne verrà in conseguenza, che la materia farà composta di ciò, che non è materia, cioè di esseri semplici, ed inestesi, o del nulla messo insieme; il primo è insostenibile (84. 89.), il secondo è assurdo (60.); dunque la materia non può essere se non incomposta, e perciò tanto limitatamente, che illimitatamente per natura indivisibile; il che &c.

SCOLIO I.

109. Sul modello della materia hanno i Geometri, come si disse, fabbricato la loro scienza, la quale per altro è tut-

sutta quanta supposta, e può con ragione chiamarsi un Ente metafisico. Quei per il fine prefissosi avevano bisogno di poter dividere a piacimento qualunque lor quantità, e perciò hanno supposto, ch'ogni estensione fosse divisibile; ma siccome la divisione successiva d'un'estensione lascia sempre all'intelletto porzioni d'estensione; così non trovando mentalmente alcun termine a tal supposta divisione, hanno d'accordo stabilito, che qualunque quantità fosse divisibile all'infinito. Non contenti poi di restare dentro i limiti loro, avendo veduto, che la materia non può esistere, se non estesa, ed essendoli apparsa sostanzialmente divisibile, hanno per analogia preteso di provare, che ancor essa debba esser divisibile all'infinito. Chi per altro farà sovra di ciò una conveniente riflessione, conoscerà, che il voler applicare tutte le proprietà concepite dalla nostra mente in un soggetto totalmente immaginario, e da noi creato, ad un soggetto realmente esistente, e creato da Dio, e ciò, perchè questo ha con quello alcuni caratteri di comune, non è che una pura induzione, la quale non convince. Così il dire, che per la ragione che la linea, o la superficie, o il solido si ammettono divisibili all'infinito, tale dev'essere ancor la materia, perchè è estesa, e perchè ci appar divisibile, a me sembra una conclusione troppo ardita, la quale in conseguenza non merita assenso. In fatti la materia ha molte altre proprietà, che non hanno le figure geometriche; onde va riguardata unita a' suoi caratteri, almeno principali, per esatta mente concludere a favore, o contro tale apparente divisibilità.

Ma

48 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

110. Ma che diranno i Geometri; se insistendo su i loro principj si farà vedere, che in Geometria non si può rigorosamente ammettere divisione di sorta alcuna, e che perciò, proseguendo la traccia del loro ragionamento, la materia non può essere divisibile? Alla prova. Essi suppongono primieramente il punto realmente indivisibile, indi pretendono, che dal suo flusso, ovvero da innumerabili punti messi l'uno accanto all'altro risulti la linea. Nel primo caso siccome in tutta quanta l'estensione della linea deve esser necessariamente incontrare questo punto, è manifesto, che la linea farà in ogni luogo indivisibile. Nel secondo caso è anche evidente, che non si potrà far divisione della linea, se non tra punto, e punto, il che non può chiamarsi vera divisione; ma la superficie, e il solido provengono dalla moltiplicazione delle linee; dunque nè la linea, nè la superficie, nè il solido saranno in Geometria realmente divisibili.

111. Ma concedasi, che la linea sia divisibile; dico, che non può esserlo all'infinito; imperciocchè ogni composto è risolubile in ciò, che lo compone; ma la linea, come divisibile, è composta (107.), ed il punto per la genesi, che ne danno i Geometri, è il suo componente; dunque la linea dev' essere risolubile nel punto. Ma supponendo la linea divisibile all'infinito, ne viene l'inconveniente, che non sia risolubile in ciò, che la compone (altrimenti la serie decrevente all'infinito, che nasce da tal supposta interminabile divisione, arriverebbe all'ultimo termine, cioè al punto per natura indivisibile, il che è una contraddizione); dunque ripugna, che la linea sia divisibile all'infinito. Quando neghisi, che il punto sia il componente della linea, qualun-
que

que altro si fitti per suo componente, vi si adatterà sempre il medesimo raziocinio. Che se non se le voglia assegnare componente alcuno, ella in tal caso sarà incomposta, e perciò totalmente indivisibile (106.); il che farebbe contro l'ipotesi. E qui tralascio di nuovamente riflettere, essere una stravaganza il dire, che la materia è divisibile all'infinito per la ragione che il numero, il quale è una cosa totalmente astratta (50.), vien supposto tale per comodo.

112. Finalmente il pretendere di provare la divisibilità all'infinito della materia per mezzo degli effluvi, o degli odori; delle soluzioni, o delle tinture; della piccolezza delle particelle sanguigne d'un Insetto; o de'componenti di un Insetto visibile soltanto all'occhio armato di eccellente microscopio, è una fatica perduta; perchè ciò non prova altro, se non l'esorbitante piccolezza delle particelle, che racchiudonsi dentro il volume d'un corpo, ma non già un'interminabile divisibilità del materiale a tutta sostanza. Anzi dovendosi dal fatto tirar delle conseguenze per decidere su tal intrigata questione, credo (come spero di far vedere nel seguente Capitolo, e altrove) di aver convincenti ragioni da dimostrare, che la divisibilità delle parti componenti un volume corporeo deve aver necessariamente un limite; il che servirà per riprova delle già addotte dimostrazioni (103. 108.), tentandone in tal guisa per varie strade, come far debbesi (74.), la conferma.

S C O L I O II.

113. Un anonimo Matematico moderno ha preteso d'aver dimostrato, che la materia non è divisibile all'infinito, e ciò con un raziocinio, ch'egli crede d'una forza irresistibile. Ecco le sue stesse parole. „ Dividasi, egli dice, ^(a) una linea „ in due parti eguali; piglisi una di queste parti, e dividasi „ nuovamente in due parti; dividasi similmente l'una di „ queste due parti, e così successivamente a piacere; non solamente non si giungerà mai all'ultima divisione, ma „ non si potrà nemmeno assegnare il numero delle divisioni, ch'è necessario per giungervi. Si può forse dedurre da „ ciò la conseguenza, che tutte le possibili divisioni di questa linea sono infinite? Erra chi lo crede, per quanto ne „ dicano i Metafisici, i quali hanno questa pretesione; ed „ ecco come io lo dimostro. Se questa linea è divisibile in „ infinito, ella contiene attualmente in se un'infinità di luoghi, ne' quali può esser divisa: ciò è innegabile; poichè ella non può esser divisa ne' luoghi, che non contiene. Se „ dunque sono in lei questi luoghi, Dio li vede, onde non „ gli costerà che un atto della sua volontà per farne tutt'ad un tratto la divisione. Egli è evidente in tal caso, che „ la penultima metà ne conterrà due, ciascuna delle quali „ sarà indivisibile; dunque &c. E non mi si dica, che queste due metà saranno tuttavia divisibili all'infinito; poichè „ avendo supposto, che Dio abbia fatto la divisione in tutti „ i luoghi, dove le divisioni infinite di questa linea erano possibili, „ sibi-

(a) *Lettre d'un Mathématicien à un Abbé C^{te}. pag. 14. 15. 16.*

„ sibili , ne verrebbe , che Dio non avrebbe veduto tutti
„ questi luoghi , se vi restasse a divider qualcosa . Dunque
„ la penultima metà conterrebbe due indivisibili , come ho di-
„ mostrato ; e in conseguenza l' antepenultima ne conterrà
„ quattro , la precedente ne conterrà otto , e così dell' altre ,
„ raddoppiando sempre fino alla prima ; dal che deducesi ,
„ che tutta la linea non farebbe che un composto d' indivi-
„ sibili , il numero de' quali farebbe veramente inassegnabile ,
„ ma per altro finito , giacche il doppio di questa linea ne
„ conterrebbe due volte più , come ho detto superiormente „.

114. Questo argomento, che non è originalmente del Matematico anonimo, ma bensì degli Epicurei^(a), è difettoso; imperciocchè concesso, che la materia sia divisibile in infinito, a voler supporre, che Dio la divida in tutti i *deve*, ne' quali è divisibile, bisogna supporre ancora, che il numero delle divisioni debba essere realmente infinito; imperciocchè se fosse limitato, ne seguirebbe subito, che la materia non sarebbe più divisibile all'infinito, contro l'ipotesi. Se dunque il detto numero di divisioni dev'esser realmente infinito, è subito una contraddizione ne' termini il dire, che vi siano le penultime divisioni di ciascuna particella; ovvero supponendo, che vi siano quest'ultime divisioni, si viene ancora a supporre, che l'infinito abbia termini, o che la divisione successiva dell'infinito sia esauribile; cose tutte, che ripugnano.

115. Non si può creder poi, che il detto Matematico supponga, che dopo la divisione fatta da Dio in tutti i *donde*, ne' quali n'è la linea fuscettibile, i rimasugli siano linee piccolissime; altrimenti, siccome egli ha accordato, che la li-

G 2

nea

(a) V. Petr. de Martino *Philos. Nat.* | *Inflint. lib. I, Cap. VI, §. 112, pag. 59.*

nea è divisibile in infinito, la divisione non sarebbe perfezionata; bisogna dunque, che egli confessi che la linea retta in tal occasione risolta in parti inesatte, che non son linea, ma che sono atte a formar la linea, cioè l'estensione, e questa in fatti è la sua intenzione, come dal progresso del suo discorso ravvisasi; ed allora ne seguirebbero gli accennati inconvenienti (84. 86. 89.), giacche egli parlando della linea ha la mente ancora alla materia. Ma ne verrebbe anche un altro assurdo, ed ecco in qual maniera. Se si suppone, che un pezzo di linea resti diviso, è manifesto, che la sezione farà una sola, e due le parti divise: Si profeguisca la divisione: il numero delle parti divise sarà sempre maggiore d'un'unità rispetto al numero delle divisioni; cioè fatto il numero delle divisioni $= a$, farà questo a quello delle parti residue, come, $a : a+1$. Suppongasi ora infinito il numero delle divisioni, qual si richiede a dividere onninamente la linea stabilita, d'accordo divisibile all'infinito; starà il numero delle divisioni alle parti divise, come $\infty : \infty+1$; vale a dire, che se Dio volesse render la linea divisa all'infinito anche in un solo istante, gli converrebbe (giacche si pretende, che la linea venga da tal divisione risolta in Enti reali) dividerla in tante parti, che il loro numero sconfinasse d'un'unità l'infinito, cioè che il loro numero oltrepassasse un numero, che non ha fine; il che pure è una contraddizione ne' termini.

116. Risponderanno forse alcuni Geometri, che l'infinito, più l'unità, è eguale al solo infinito, essendo l'unità riguardo ad esso un infinitamente piccolo, o un inassegnabile, e perciò disprezzabile a fronte dell'infinito; ma ricordiamo-

PARTE PRIMA, CAPITOLO II. 53

moci, che i Geometri in questo caso parlano in un senso relativo, e non assoluto, (87.), e qui si parla in un senso assoluto, e non relativo; onde una tal risposta non proviene, come pure il detto Matematico va d'accordo.

COROLLARIO I.

117. Giacche la materia non è divisibile, nè con limite, nè senza limite (103.108.), ne segue necessariamente, che qualunque volume materiale debba constare di parti indivisibili insieme accozzate, solidissime (96.), estese, e di numero inaccessible alle nostre ricerche, ma però limitato (102.); onde ne può un corpo contenere il doppio, il triplo &c. d'un altro.

COROLLARIO II.

118. Tali particelle essendo composte (108.), e perciò onninamente infecabili, debbono essere, ciascheduna da se, nella sua sostanza un perfetto continuo.

COROLLARIO III.

119. Dunque dovrà ciascuno di questi indivisibili esser necessariamente dotato di sostanza uniforme, e semplicissima; poiche se fosse misto, farebbe composto, e perciò divisibile, contra ciò, che si è dimostrato.

SCO-

119. b. Oltre ad un argomento simile all' accennato (113.), gli Epicurei ne facevano due altri egualmente inconcludenti. L'uno posa su questo fondamento, che tutti i numeri infiniti siano eguali tra loro; onde se qualunque parte della materia fosse divisibile all' infinito, tante parti farebbero in una porzione maggiore, quante in una minore, e perciò la maggiore eguaglierebbe la minore. Ma acciò due quantità siano eguali, due cose richieggonsi; cioè che il numero delle parti sia eguale in amendue; e che tutte le parti d'una porzione siano eguali a quelle dell' altra. Se amendue queste circostanze si troveranno in due porzioni materiali, le quantità loro saranno eguali; altrimenti mancandone una, saranno ineguali. Così non per questo che il braccio, e il palmo dividonsi in dieci parti eguali, ne segue, che amendue esser debbano eguali, perchè ciascuna parte del braccio è sempre maggiore di ciascuna parte del palmo. Nell' altro argomento oppongono, che in tal caso qualunque piccola porzione di materia si potrebbe suddividere in sfoglie quadrate di tanto numero, che farebbe capace di ricoprire tutto il mondo; il che chiamano assurdo. Ma ogni volta che concedono questa divisibilità, ne viene obbligatamente tal conseguenza; nè fa ostacolo il non poterla noi concepire, perchè non è assurdo quello, che al nostro intelletto è inaccessibile.

CA-

CAPITOLO TERZO.

Dell'esistenza degli Atomi, e de' loro Sintomi.

§§§§*§§*

DEFINIZIONE XLII.

120. **G**Li accennati indivisibili (117.) si chiameranno in avvenire *Atomi, corpi semplicissimi, o primordiali, o elementari*, e ciò ancora per non confonderli con gl'indivisibili geometrici, de' quali si parlerà a suo luogo.

PROPOSIZIONE XI.

121. *La materia considerata, e confrontata a parte a parte non è tutta quanta omogenea.*

Se fosse tale, la varia disposizione, e trasposizione delle sue parti, qualunque fosse, non farebbe conoscere in essa diversità alcuna in tutto, e per tutto; il che è contro l'osservazione, la quale dimostra in essa una prodigiosa varietà; è dunque manifesto l'assunto.

Sco-

S C O L I O.

122. Pretendono alcuni Filosofi con Des-Cartes, che la materia tutta sia omogenea, ma vogliono, che la varietà delle cose apparenti non da altro provenga, che da una *modificazione* (voce abusiva) de' suoi componenti, e ne mostrano in riprova le varie sostanze, nelle quali un corpo può trasformarsi. Il grano ex. gr. triturato in farina, e impaltato con acqua, e lievito, diventa pane; mangiato trasformati in chilo, di chilo trasformati in sangue, di sangue in carne &c.. N'a queste sono deduzioni tumultuarie, che derivano da un principio falso; il granello del grano acquista le predette metamorfosi, appunto perche nelle sue successive mutazioni s'accompagna con nuovi corpi, dall'unione de' quali, non è gran cosa, che risulti un terzo differente, come è manifesto a chi vi fa un poca di riflessione; ma se il granello suddetto si triturasse per molto tempo in un luogo inaccessibile totalmente a' corpi stranieri, e avventizj, non si troverebbe mai altro, che farina. Di più se fosse vera una tal pretesa modificazione, dovrebbe riscontrarsi in ogni corpo; ma per quanto si tormentino l'acqua, il mercurio, l'oro, l'argento, la terra vergine &c., purché s'adoprinno tutte le debite circospezioni, si troveranno sempre nella loro sostanza immutabili intrasformabili, indestruttibili. Ma non è questo il luogo per far vedere estesamente l'inganno d'alcuni Fisici sperimentatori, i quali hanno creduto di osservare tali metamorfosi a tutta sostanza, e basterà avere accennato di passaggio le riprove contro questa modificazione; ognuno può sugli Autori più

più circospetti, e particolarmente sulla Chimica del chiarissimo Boerhaave convincersi di questa verità, per quanto appartiene a fare gli sperimenti; si esporranno poi a suo luogo alcune forti ragioni, che tal modificazione distruggono. E qui avvertasi, che io non voglio adesso prevalermi degli argomenti precedentemente addotti a favore dell'esistenza degli atomi, ma procuro, come altrove ho accennato (112.), di tentarne per vie dalle già battute indipendenti la prova; così una volta che vengano replicatamente stabiliti gli Atomi, le modificazioni vanno subito in dispersione.

COROLLARIO.

123. Non essendo la materia omogenea considerata riguardo al tutto, deve constare di parti eterogenee, vale a dire, deve essere necessariamente mista dove più, dove meno, relativamente al concorso più, o meno numeroso delle dette sue parti eterogenee.

PROPOSIZIONE XII.

124. *La materia risulta di particelle semplicissime, ed elementari insieme coadunare, le quali sono omogenee relativamente alle simili, ed eterogenee riguardo alle dissimili.*

Giacche la materia è mista (123.), o è mista limitatamente, o illimitatamente. Nel primo caso siccome tutte le sue parti debbono stare al contatto per la sua impenetrabilità (81.), ed essa è divisibile (79.), suppongasì, esser successivamente divisa con un numero continuato di sezioni. Per quan-

H

10

58 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

to esorbitantemente grande s'immagini questo numero d'operazioni, si dovrà finalmente arrivare a un termine tale di separazioni, che le parti separate non saranno più miste con altre eterogenee, ma messe insieme da per se tutte le omogenee, formeranno tanti volumi di natura l'uno dall'altro totalmente differente; il che è per se manifesto. Nel secondo caso supposta la materia mista o eterogenea all'infinito, si deve necessariamente ammettere un'interminabile diversità, e dissomiglianza tra particella, e particella qualunque assegnabile della medesima, dimodoche il corpo A non solo sarà in sostanza, e in apparenza dissimile dal corpo B, ma diviso ancora l'uno o l'altro in quante si vogliano parti di varia grandezza, e configurazione, niuna delle parti del corpo A potrà rassomigliarsi con qualunque altra dal medesimo distaccata; niuna del corpo B con qualunque altra dal medesimo divisa, e niun rottame del primo con niun rottame del secondo. Non si troverà dunque corpo alcuno, che compresentato ad un altro lo rassomigli; trasposte, e rimescolate le parti d'un corpo, dovrà questo variare continuamente, almeno d'aspetto, e non esser più ad ogni momento riconoscibile. Un pezzo d'oro ex. gr. non avrà nell'universa materia somiglianza con verun altro corpo, e ci sarà visibile sotto una varietà interminabile d'apparenze; e ciò tantopiù, quantopiù sarà o voluminoso, o diviso, o battuto, o liquefatto; in somma quantopiù sarà fatto mutar luogo, ed ordine in qualunque maniera alle sue parti; il che essendo contrario totalmente ad una continua esperienza, ne segue, che non si può in conto alcuno ammettere la materia mista, ed eterogenea all'infinito; onde bisogna, che consista di corpi semplicissimi, i quali
 ripar-

ripartiti formar possano tante classi diverse, ed eterogenee fra loro, ma ciascuna risultante di componenti omogenei; il che &c.

S C O L I O.

125. Potrebbe opporsi, che vi possono esser benissimo corpi semplicissimi, o primigenj, che considerati in se stessi siano misti all' infinito, ma considerati relativamente a' corpi risultanti da un loro ammassamento omogeneo, o sia della medesima specie di mistura, si possano ammettere come semplici. Al che rispondesi, facendo la seguente divisione. O tali elementi si suppongono solubili in tutta la serie continuamente diversa all' infinito; o si suppongono indissolubili. Se solubili, siamo da capo; imperciocchè mutato l'ordine delle parti, deve per la dottrina delle combinazioni mutarsi anche il tutto, ed apparire in conseguenza sotto diversa sembianza, e sotto nuova caratteristica; così l'acqua sarebbe acqua, e non acqua, l'oro sarebbe oro, e non oro &c. il che ricade ne' sovraccennati inconvenienti. Se indissolubili; cioè se i detti loro differentissimi componenti rimangono immobili, ed inseparabili da qualunque forza, la questione sarà chimerica, e in conseguenza inutile; imperciocchè o misti, o semplici che si suppongano; faranno sempre la figura di semplici, come quelli, che con la varia loro mescolanza debbono variamente organizzare i misti, e che debbono per l'ipotesi rimanere insecabili, ed indestrutibili. E' però vero, che potendo gli Oppositori solamente supporli, ma non dimostrarli misti all' infinito, vi sa-

H 2

rebbe

60 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

rebbe tanta ragione dalla lor parte di così crederli, quanta dalla mia di crederli semplicissimi, con questa differenza, che io avrei il vantaggio di non moltiplicare, come essi farebbero, gli Enti senza necessità, il che è un inconveniente (61.); va dunque a terra l'opposizione.

PROPOSIZIONE XIII.

126. *La Materia non è divisibile all'infinito.*

E' fuor di dubbio, che mutata la configurazione delle particelle costituenti un composto, deve necessariamente mutarsi la sua organizzazione, e conseguentemente la sua apparenza. Se dunque le particelle semplici primigenie de' corpi, dalle quali risultano i misti (124.), fossero divisibili, la struttura di tutte le produzioni naturali bene spesso si cangerebbe, e con essa cangerebbersi ancora frequentemente in nuovi aspetti non più osservati la gran scena del Mondo; ma tutte le dette produzioni mostrano ne' loro cangiamenti vicende d'un periodo inalterabile; dunque le dette particelle semplici primordiali, che costruiscono la gran macchina dell'Univerſo, sono nella loro figura immutabili, e però infrangibili da qualunque forza esistente in natura; nel che concordano tutti i migliori Fisici moderni sotto il vessillo del gran Newton (a). Posto ciò, se Dio avesse creato queste particelle elementari divisibili all'infinito, avrebbe loro dato una proprietà inutile, come quelle, che sarebbero state create divisibili per non esser giammai divise; il che ripugna (61.); dunque le particelle semplicissime conformatrici de' corpi debbono esser in-

(a) *Optic. Quest.* 37. pag. 325. Edit. 1. *Lausannæ* 1740.

indivisibili per natura, e perciò la materia non è divisibile in infinito; il che &c.

S C O L I O I.

127. Mi farà forse opposto, che io doveva prima dimostrare, che Dio poteva formar l'atomo perfettamente duro, o sia d'una perfetta continuità, e allora ne veniva subito la conseguenza legittima, che avendolo egli potuto fare, e non avendolo fatto, avrebbe dato nell'inconveniente di far per il più ciò, che far poteva per il meno. Al che rispondendo, che non solo credo, che Dio abbia potuto farlo, ma credo repugnante, ch'egli abbia creato la materia divisibile in infinito; ed eccone la ragione. Se Dio l'ha creata tale, è certo, che ella contiene tutti i luoghi, ne' quali è capace d'esser divisa, e se li contiene, Dio gli vede; or se gli vede, io domando: tra luogo, e luogo cosa vede? Se mi si risponde, materia, la materia non farebbe più divisibile all'infinito, contra l'ipotesi. Se mi si risponde, Enti semplicissimi privi d'estensione, questi si è veduto, che non sono possibili (84.89.); non vi resta dunque altro, che il nulla assoluto; onde Dio vedrebbe nell'atto istesso la materia, e come una cosa realmente esistente, e come il nulla assoluto, la di cui esistenza ripugna (60.); il che è un orribile assurdo, non essendo Dio suscettibile del principio di contraddizione; dunque ripugna, che Dio abbia creato la materia divisibile all'infinito, e perciò, annullata l'obbiezione non solo rimane la dimostrazione della presente Proposizione in tutto il suo vigore, ma quando non fosse d'universa

62 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

verſal ſoddiſfazione , la prova addotta in queſto Scolio può ſupplire alle ſue veci. Sicche eſſendòſi oramai ſufficientemente dimoſtrate per più verſi queſte verità , (103. 108. 115. 116. 117. 118.), laſciamo , che ognuno ſcelga quella dimoſtrazione *a priori* , o *a poſteriori* , che più li piace , e paſſiamo intanto agli importanti Corollarj , che ne provengono .

COROLLARIO I.

128. Gli Elementi dunque di tutto il materiale ſono (ripetiamolo a motivo dell'ultime replicate dimoſtrazioni con diverſo metodo (115. 117.)) ſoltanze incoſtate , e però ſempliciſſime dotate d'un continuo perfetto , e in confeſuenza infrangibili , inſeſſibili , ingenerabili , e indeſtruttibili , così create di pianta dalla divina Onnipotenza , acciò ſervano di baſe a tutte le produzioni dell' Univerſo.

S C O L I O II.

129. Ma qui ſentomi univerſalmente rinſacciare eſſere aſſurdo , che poſſa darſi eſtenſione ſenza parti effettive ; al che riſpondo , che la verità non può eſſere ſe non una ſola (7.), e che la natura non diſcorda mai da un eſatto raziocinio giuſta quel detto

Nunquam aliud Natura, aliud Sapientia dicit;

onde tralaſciata ogn' inutile altercazione , ogni volta che ſia ſtato eſattamente dimoſtrato , che la materia non ſia diviſibile

sibile in infinito, e che non sia risolubile in ciò, che non è materia, ovvero ogni volta che sia stato dimostrato, che la materia sia essenzialmente incomposta, bisogna necessariamente venire all' atomo senza parti effettive, e con tutto ciò esteso; altrimenti più atomi non potrebbero formare l'estensione, che ravvisasi nel volume de' corpi. Che se facesse ostacolo il non potersi concepire l'atomo esteso senza parti, replicherei, che ciò non prova niente contro la sua esistenza ogni volta che questa sia stata con più metodi esattamente dimostrata (70.); e che se molti Filosofi hanno col Leibnizio ammesse le monadi, perchè le credevano stabilite da un raziocinio ben dedotto, quantunque incomprendibili, come notò l'Eulero (85.), si possono ammettere per la medesima ragione gli atomi dell' espresso carattere, benché siano al nostro intelletto assai limitato inconcepibili.

S C O L I O III.

130. Democrito, ed Epicuro erano anch' essi d'opinione, che vi fossero gli atomi, ma ne avevano un'idea differente dalla nostra in quanto alle loro proprietà, che si anderranno esponendo; nè mai, per quanto sappiasi, ne dimostrarono concludentemente l'esistenza. Lucrezio Caro ci portò d'Atene la dimostrazione, che correva, cred'io, a' suoi tempi; eccone le parole (a):

*Tum porro quoniam est extremum quodcumque cacumen
Corporis illius, quod nostri cernere sensus*

Jam

(a) Lib. I.

64 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

*Jam nequeunt: id nimirum sine partibus extat,
 Et minima constat natura: nec fuit unquam
 Per se secretum, neque posthac esse valebit:
 Alterius quoniam est ipsum; primæ quoque & imæ;
 Inde aliæ atque aliæ similes ex ordine partes
 Agmine condenso naturam corporis explent.*

quale specie di dimostrazione a mio credere non prova niente:

COROLLARIO II.

131. Rigettate le monadi (84.), e i punti immateriali (89.), e stabilita l'esistenza degli atomi (117. 128.), ne segue necessariamente, non potervi essere fuor di questi altro corpo preesistente, o primigenio; altrimenti, vi farebbe l'atomo dell'atomo in infinito, e si tornerebbe all'interminabile divisibilità della materia già ripudiata (103. 108. 126. 127.).

COROLLARIO III.

132. L'impenetrabilità dunque (81.), e la solidità perfetta della materia (96.) non farà, se non nell'atomo; onde siccome per materia, cioè per tutto il sensibile (1.), non si può concepir altro, che acervi d'atomi posti al contatto, così vedesi, non poter esser la materia sostanzialmente divisibile, nè all'infinito, nè limitatamente, ma sempre immutabile per natura, dimodoche quando dividiamo un corpo, non facciamo divisione reale di sostanza corporea, ma soltanto relativa, togliendo unicamente dal contatto

tatto gli atomi assieme ammuccinati; e però falsi sono i Teoremi di Keil ^(a) supponenti l'interminabil divisibilità della materia.

COROLLARIO IV.

133. Concesso, che lo Spazio sia (come spero di potere stabilire fra poco) reale, infinito, indivisibile, immutabile, e però senza superficie; siccome fuori dell'intelligenze spirituali non v'è altro tra le cose realmente esistenti, che spazio, e materia, (esclusione il Tempo, che farò vedere, esser soltanto una cosa relativa), così non v'è altra superficie nell'Universo, che quella dell'atomo, di cui egli come esteso, e circoscritto deve necessariamente constare. Ma l'atomo è per se stesso infecabile (132.); dunque infecabile ancora, e indivisibile è di suo carattere la superficie; onde allorché noi dividiamo una superficie d'un dato volume corporeo in più parti, facciamo un'apparente, e non una reale divisione, cioè facciamo una divisione relativa a' nostri usi; nella quale occasione restando allontanati soltanto gli atomi dal lor consorzio portano seco intatta la loro innata immutabile superficie.

COROLLARIO V.

134. Siccome gli atomi si possono variamente associare, così da i varj loro cumuli risulterà la varia configurazione de' corpi sensibili, e perciò la materia farà diver-

I fa-

(a) *Introd. ad veram Phys. lect. V. pag. I 57. seqq. Edit. Lugd. Bat. 1739.*

66 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

famente figurabile, ma lo farà apparentemente, cioè riguardo a' detti ammassamenti, e non in sostanza, giacche la superficie degli atomi è totalmente inalterabile (133.). Quindi *configurazione assoluta* è quella, che è indispensabile, ed ingenita agli atomi; *configurazione relativa* è quella, che prendono le varie opposizioni di atomi con atomi nell' associarsi a formare qualche corpo, come ancora ad accrescerlo, o a diminuirlo di volume.

COROLLARIO VI.

135. La materia dev' essere necessariamente porosa, non potendo gli atomi, di qualunque configurazione si ammassano, fare a meno di non lasciar de' vuoti nelle varie loro coadunazioni, particolarmente dovendovi spesso concorrere il moto ad alterarne la situazione, e la vicendevole apposizione. Tal porosità però non può andare all' infinito, come molti han creduto, dovendo arrestarsi al perfetto continuo degli atomi (128.); il che è per se stesso evidente; e perciò deve darsi necessariamente ne' corpi ciò, che chiamasi *Vuoto disseminato*.

COROLLARIO VII.

136. Essendo la materia tutta più, o meno porosa (135.), tutta ancora sufficientemente affortigliata, dovrà esser diafana.

Co-

COROLLARIO VIII.

137. Quando gli atomi posti in un volume giungono a toccarsi in tutti i punti possibili, allora il detto volume non può più per mezzo della compressione diminuirsi; la materia dunque ha un limite di condensazione, il quale non è trasgredibile, e però non può dirsi, come alcuni hanno creduto, che la materia tutta quanta possa ridursi in un pozzo di ordinaria grandezza, vale a dire in un piccol volume riguardo alla sua vastissima estensione.

COROLLARIO IX.

138. Son dunque falsi gli Elementi di Des-Cartes; come quelli, che son supposti dal loro Autore divisibili in infinito.

S C O L I O.

139. Avvertasi, che quando io dirò in avvenire *Materia divisibile, e figurabile*, intendo di usare il linguaggio comune relativo a' nostri usi, e non di significare, esser l'atomo di tal carattere; il che sia detto adesso per sempre, acciò non sembri, che io mi contraddica.

PROPOSIZIONE XIV.

140. *Gli Atomi dovevano essere necessariamente eterogenei per la confurrezione de' vari misti, che osservansi in natura.*

Se fossero itati tutti omogenei, non v'era ragion sufficiente, per cui più gli uni che gli altri dovessero mutar natura, divenendo eterogenei; e per cui delle nuove innumerevoli proprietà possibili potessero assumerne più tosto una, che un'altra; onde tutta la materia sarebbe rimasta sempre omogenea, cioè d'aspetto uniforme in tutte le sue produzioni; ma queste sono d'aspetto assai diverso; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

141. Ruina dunque la strepitosa *Materia prima* d'Empedocle, d'Aristotile, de' Peripatetici, e degli Scolastici insieme con la tenebrosa sua definizione; non bastando a correggerla le mostruose forme sostanziali licenziate oggimai dal buon senso (a). Gli atomi di Democrito, d'Epicuro, e di Gassendo, posti d'una natura universalmente uniforme tra loro, sono pure per tal generale omogeneità insostenibili, come insostenibili sono le modificazioni Cartesiane anche altrove rigettate (122.).

PRO-

(a) V. *Hist. du Ciel &c.* T. 2. pag. 122. seg.

PROPOSIZIONE XV.

142. *Quantunque la materia altero non sia, che un mescuoglio di atomi eterogenei, non debbono però questi esser tutti di tal sorta, che non ve ne sia neppur uno, che si rassomigli ad un altro.*

Imperciocchè, se neppur uno ve ne fosse omogeneo ad un altro, la materia tutta non avrebbe in tutta quanta la sua estensione porzione alcuna ad un'altra rassomigliabile; onde ne succederebbero gli inconvenienti altrove accennati (124.), che ad una continua esperienza si oppongono; è dunque manifesto l'assunto.

COROLLARIO I.

143. Deve esservi dunque necessariamente una moltitudine di atomi di ciascuna specie, cosicchè venendo in occasione del moto quelle specie differenti tra loro mescolate, e rimescolate, se ne formino miti all'aspetto diversi a proporzione della varia eterogeneità degli atomi concorsi, e della quantità, con cui gli atomi di varia specie concorrono, e delle varie loro combinazioni nella comune mescolanza; cioè 1.) a proporzione del numero delle specie differenti concorse; 2.) del numero di quegli atomi, ognuno de' quali riconosce la sua specie particolare; 3.) della varia loro distribuzione.

Sco-

S C O L I O I.

144. Per meglio spiegarmi, figuriamoci varj mucchj di semi diversi, ognuno de'quali mucchj sia composto di semi omogenei; un mucchio ex. gr. di granelli di grano, un altro di panico, un altro di miglio, un altro di vecce &c.. Se ne mescolino varie porzioni di ciascuna classe, o specie; è chiaro, che il misto risultatone diversificherà più, o meno, a proporzione delle specie, che io farò concorrere in esso; cioè il misto di tre tali specie sarà diverso da quello di due, e questo da quello di quattro, &c.. Di più tal misto diversificherà nuovamente a proporzione del numero de' granelli di ciascuna classe; così il misto di parti eguali di ciascuna classe sarà diverso da quello, dove concorreranno parti diseguali di semi; in oltre se quelli di miglio si aduneranno più in un luogo, che in un altro, cioè se i semi saranno egualmente, o inegualmente distribuiti nella mescolanza &c..

COROLLARIO II.

145. Tutti gli atomi omogenei debbono essere eguali fra loro, non essendovi ragione, per cui nelle produzioni semplicissime omogenee l'una debba prevalere all'altra, tanto in volume, che in configurazione (53.).

Co.

COROLLARIO III.

146. Gli atomi eterogenei adunque potranno essere di figura, e di grandezza differente; il che ci vien maggiormente persuaso dall' osservare le differenti porosità nelle diverse produzioni.

COROLLARIO IV.

147. Vi debbono esser tra' corpi volumi d' atomi interamente omogenei, essendo impossibile che nel rimescolamento di tante diverse classi qualche quantità di soli atomi omogenei non s' accozzi, e non si raccolga separatamente; qual unione, quando anche vi si trovi dispersa qualche particella peregrina, o eterogenea sfuggente i nostri sensi, può far figura di semplice.

COROLLARIO V.

148. Un atomo, o un dato volume di atomi, siano semplici, o misti, è impossibile, che sia trasmutabile in atomi di natura, o di figura diversa; onde nelle varie manipolazioni de' corpi non potranno essi far altro, che mutar luogo, e contatto reciproco.

Scò-

S C O L I O II.

149. Qualora l'industria umana usando le debite cautele trovi alcune specie di corpi di struttura totalmente immutabile, ovvero irriducibile in altri volumi tra di loro eterogenei, bisognerà convenire, esser tali corpi formati da un ammassamento d'atomi omogenei, nulla turbando tal verità, come si è detto (147.), l'interposizione, e il concorso di qualche particella straniera. In questo possesso per confessione d'Uomini grandi i più schietti, e i più veridici, tra' quali è l'instancabile Boerhaave (a), sono i metalli spogliati al possibile delle parti eterogenee, l'acqua, il mercurio, la terra vergine &c.. In fatti per quanto in mille maniere misti ad altri corpi rimangano mascherati, ritornano sempre al loro esser primiero. Non potrà mai dunque un elemento aqueo ex. gr. cangiar natura, e trapassare in un elemento mercuriale, e viceversa; o vogliamo dire un volume aqueo in un volume mercuriale, e viceversa; così di tutte le altre trasformazioni degli altri corpi semplicissimi, come sarebbe del mercurio in oro, o dell'oro in altri metalli, o corpi semplici, e misti. L'arte chimica pertanto, con tutte le magnifiche promesse de' suoi Adepti, non è mai giunta, nè mai potrà giungere ad altro, che a cangiare la situazione delle parti ne' corpi, siano semplici, o misti; il che non è mai trasformare a tutta sostanza un corpo in un altro. E' dunque assurda tra gli Uomini la speranza, o sia follia, di una tal trasformazione, come appunto assurda sarebbe la prentensione d'annichir-

(a) *Chimie Elem. T. 1. De Merc.*

chilare un corpo, e crearne in sua vece un altro di pianta; il che farebbe il sommo dell'umana temerità. Spero però io altro tempo diffondermi più convincentemente, e voglia Dio più fruttuosamente, per tentare, se è possibile, di fradicare da' cuori umani questa frenesia, che riduce spesso i troppo creduli all'ultimo estermínio delle loro sostanze, e talvolta di loro stessi.

COROLLARIO VI.

150. Per esser gli atomi fra loro differenti in grandezza, e configurazione (146.) e per non darli fuor di essi altra sostanza corporea (131.), vi dovrà essere in natura il grande, e il piccolo, cioè il massimo, e il minimo; e qui intendo di parlare di grandezza reale, qual è quella dell'atomo, e non di grandezza relativa, qual è quella del volume (21.); similmente quando dico il massimo, e il minimo, non pretendo, che vi sia un solo atomo, che sia il minimo di tutti, e viceversa; ma intendo di parlare di tutti quegli atomi, che sono ciascuno la minima quantità, e viceversa.

PROPOSIZIONE XVI.

151. Il numero de' corpi primordiali toccato in sorte sì al nostro, che agli altri Globi, è limitato.

Se fosse infinito, il nostro Globo, che nella sua estensione è limitato, verrebbe a comprendere in un luogo circoscritto una serie realmente infinita di particelle corporee estese, e solide (96.), poste in conseguenza l'una al cor-

K

tat.

74 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

tatto dell'altra, nè l'una dall'altra molto diverse in grandezza; il che è assurdo (102.); il medesimo dicasi di qualunque altro Globo celeste; è dunque manifesta la Proposizione.

COROLLARIO I.

152. Quando si potesse sapere il numero delle varie classi di tali atomi, o elementi, è manifesto per la dottrina delle combinazioni, che si saprebbe in quante maniere si potessero variamente combinare per il risultato di tutti i misti possibili in ogni Globo.

COROLLARIO II.

153. Siccome innumerabili sono le diversità de' misti, che osservansi nella nostra terra, ne viene per conseguenza necessaria, che molte sieno le specie de' suoi elementi; onde è falso, che sieno solamente quattro, come pretendeva Aristotile; poichè al solo numero di ventiquattro si estenderebbero le possibili trasposizioni; gli ambi sarebbero sei, i terni quattro, un solo quaderno, e quattro i volumi de' corpi semplici; il che vien dimostrato falso dall'esperienza. Con simil computo si troveranno parimente erronei i principj Chimici, che sono cinque, i Cartesiani, che sono tre, i Beckeriani, che sono due, &c.

Co

COROLLARIO III.

154. Quando si accumuleranno in un volume molti atomi tutti omogenei, la loro varia combinazione, è manifesto, che non verrà ad alterare giammai tal unione, onde rimarrà sempre il tutto nel medesimo grado di semplicità.

S C O L I O.

155. Non v'è ripugnanza alcuna a credere, che vi possano esser de' Globi dotati di corpi primordiali differenti d'aspetto da' nostri; onde possono contenere corpi misti a noi cogniti, ed altri a noi totalmente incogniti, come irreperibili nel nostro Globo. E se, come alcuni de' migliori Filosofi lo credono, fosse possibile, che una Cometa cadesse dentro un Pianeta, o l'urtasse; sarebbe ancora possibile, che un tal accidente portasse in esso, oltre i terribili cangiamenti in genere di percossa, una nuova per altro non desiderabile suppellettile di corpi tanto semplici, che misti, la varia unione de' quali combinasse corpi terzi all'uno, e all'altro Mondo prima totalmente sconosciuti. Lascio ad altri il tirare da questi principj ulteriori conseguenze, e passo al

CAPITOLO QUARTO.

Del Pieno, e del Vuoto.

PROPOSIZIONE XVII.

156. **I** *L Pieno perfetto materiale è incompatibile col moto.*

Quantunque da ciò, che s'è detto (135.), comprendasi, dover esser la materia porosa, non solo unita al moto, quanto ancora considerata senza di esso, potendosi supporre, che atomi ovali, o sferici formino qualche volume; nondimeno fuori anche de' potti principj è dimostrabile contro i Cartesiani, esser il pieno perfetto materiale incompatibile col moto; imperciocchè o si suppone tal pieno terminato, o infinito. Se terminato: siccome il moto può farsi per ogni direzione, ne proverrà necessariamente una di queste due cose, cioè o che 1.) resterà la materia smembrata, e divisa in pezzi, quando il moto succeda per direzioni contrarie, ed allora vi resterà vuoto di mezzo; o che 2.) il detto moto sarà insufficiente a spiegare i fenomeni, quando sia circolare.

Per meglio spiegarmi denoti nel primo caso la superficie sferica ABC (*Fig. 3.*) tutto il recinto dell' ammassa materia

teria limitata, il quale sia pieno perfettamente; converrà confessare, essere ogni corpo ad un perfettissimo vicendevol contatto con i corpi collaterali. Eseguiscasi ora il moto; siccome la materia è solida (96.), quel corpo, qualunque sia, che deve muoversi, non potendo penetrare la materia contigua, e viceversa, dovrà sospingere avanti quell' altro corpo, che si oppone immediatamente alla sua progressione; questo sarà il simile del contiguo, e così successivamente. Suppongasi pertanto muoversi il corpo d per la retta dC , dovrà muovere tutti i corpi intermedj per tal direzione, sicche essendo esorbitante il tratto dC , bisognerà assegnare una forza spaventosa al corpo d , per quanto piccolo immaginar si voglia. Ma concedasi questo. L'ultimo corpo situato in C , dove ha da andare? Se oltrepassa il punto C , questo non è più il termine allignato; ma l'oltrepassi; tra 'l corpo s , ch'era contiguo al corpo d , ed esso corpo d dovrà nascere necessariamente una distanza, giacche tutta la serie de' corpi da d fino in C è obbligata per l'ipotesi a discostarsene. Ma la serie da B fino in s , farà rispolto, subentrerà a riempire il vuoto lasciato. Se così è, replico io, qual ragione milita a favore di tal successivo rimpiazzamento? La Natura, che abborrisce il vuoto? Questa passa oggi mai per una follia. Ma concedasi tal subentrazione. Se la serie de' corpi da B in s muta luogo, muovendosi verso C , qual corpo verrà a riempire il vuoto lasciato tra il punto B , e l'ultimo corpicello della stessa serie? I superiori, gl'inferiori, o i laterali? Non v'è ragione più a favor di questi, che di quelli; e poi non essendovi causa alcuna, che agisca su tali corpi, dovranno mantenersi nello stato di quiete, in cui tro-
va-

vavanfi (53.98.); ma voglio concedere ancor questo; bisognerà confessare, che questi lasceranno obbligatamente degli spazj, che non potranno mai riempierfi; imperciocchè se si concede, che una porzione della serie *dC* esca fuori del punto *C*, un vuoto dentro della sfera perfettamente piena *ABC* deve darfi necessariamente; altrimenti la stessa porzione di materia sarebbe rareficabile senza alterare la sua durezza, il che è falso; perchè se fosse sostanzialmente rareficabile, sarebbe anche sostanzialmente condensabile, e perciò compenetrabile contra quanto si è stabilito (81.). Ma quando rispondessero, che gli spazj si formerebbero finalmente all'estremità, il che non guasterebbe l'idea del pieno perfetto, replicherei, che quello, che si suppone farsi dalla serie de' corpi da *d* in *C*, cioè di muoversi per una direzione, si supponga farsi da un'altra serie di corpi per una direzione opposta, e così in seguito di tutte l'altre circonvicine, giacchè a tal supposizione non v'è ripugnanza alcuna; è chiaro, che ne dovrà seguire uno sparpagliamento, e uno sbramamento totale, il quale non solo non ammetterà nessun rimpiazzamento circa alli spazj lasciati, ma ne formerà successivamente de' nuovi. Riguardo dunque al moto rettilineo è impossibile il pieno perfetto di materia limitata.

In quanto poi al moto curvilineo, quando si volesse supporre concentrico, o eccentrico, bisognerebbe per salvare il pieno, che la catena de' corpi mobili si muovesse tutta ad un tratto uniformemente, il che con poca riflessione, che vi si faccia, oltre agli altri inconvenienti, non è sufficiente a spiegare i fenomeni; imperciocchè o si muoverebbe la materia tutta quanta in un tempo, il che sa-
rebbe

rebbe come se non si muovesse; o si muoverebbero varj strati per direzioni opposte senza intralciarsi, e allora non vi sarebbe, se non moto curvilineo, il che è contrario all'esperienza. Aggiungasi, che non essendo i mobili esenti dallo strofinamento, presto il moto cesserebbe in ogni parte, il che pure essendo contrario al fatto dimostra, che nemmeno è possibile il pieno perfetto limitato.

Passiamo ora al secondo caso, cioè alla materia supposta infinita. Dico, che il moto rettilineo in essa è impossibile; ed insufficiente il moto circolare fatto in una sua porzione, giacche in tutta l'estensione è impossibile. Imperciocchè se dovrà muoversi un corpo per una direzione qualunque, giacche il tutto è ad un perfetto contatto, egli dovrà muovere ad un tratto tutti i corpi posti per tal direzione; ma questi suppongonsi infiniti di numero, e tutti sono resistenti per l'esperienza; dunque un solo corpicello quanto si voglia piccolo vincerebbe nel muoversi la resistenza d'infiniti corpi; ma questa è infinita; dunque il detto corpicello possederebbe una forza più che infinita, il che repugna. Ma concedasi, che la materia non sia suscettibile di resistenza, e suppongasi, se pur è possibile, una serie di corpi CD (*Fig. 4.*) posta per diritto, e da ambe le parti totalmente interminabile. Muovasi ora il corpo A verso il punto C con la direzione AC, è certo, che dovrà muovere tutta la serie de' corpicelli posti per la direzione AC in infinito; ma tal serie è infinita; dunque per dar luogo al corpicello A, essendo impenetrabile, deve oltrepassar l'infinito, il che è un'implicanza ne' termini. Pure si sconfigni l'interminabile; domando

ora

80 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

ora la ragione per cui il corpo B, che era contiguo al corpo A, debba, per riempirne il vuoto lasciato, muoversi con tutta la serie infinita degli altri corpi, che li sono alle spalle? Forse per un impulso in fondo all' infinito? Ma passiamo sopra anche a questo inconveniente, e concediamo, che vi sia qualche ragione. Quello movimento del corpo B con tutta la catena degl' infiniti corpi dalla parte di BD o si farà tutto ad un tratto, o successivamente. Se il primo; ne seguirebbe, che l' istessa quantità di materia occuperebbe più, e meno luogo nel tempo medesimo senza lasciar vuoto alcuno; e ciò all' infinito, se incessantemente si supponesse muoversi il corpo A per la detta direzione AC, il che è un manifesto assurdo. Se il secondo; dovendo toccar prima al corpo B, poi al secondo, indi al terzo &c. a muoversi, è chiaro che un posto lasciato vuoto vi farà, o vi resterà sempre, quando non si supponesse terminabile l' interminabile; il che è un altro assurdo. Non è dunque nemmeno nella materia supposta infinita sostenibile il pieno perfetto riguardo al moto rettilineo. Per il curvilineo poi, la sua insufficienza notata nella materia finita è per le medesime ragioni adattabile anche alle assegnate porzioni dell' infinita; con che resta dimostrato l' assunto.

COROLLARIO.

157. Non potendosi dare il pieno perfetto materiale, ne viene in conseguenza necessaria, che esista il vuoto, o lo spazio, o il luogo (chiamisi comunque si vuole); e ciò non solo riguardo alla porosità, che lasciano gli atomi nel formare col loro adunamento un volume (135.), ma per quel
che

che concerne ancora la distanza possibile tra corpo, e corpo senza materia intermedia, e sia pur tal distanza piccola, o grande enormemente.

PROPOSIZIONE XVIII.

158. *Il gran Vuoto, dove esiste, e muovesi la materia, chiamato comunemente Spazio, è un Ente reale.*

O la materia poteva esistere, e muoversi nel puro nulla, o vi era necessario un luogo per la sua esistenza tanto in moto, che in quiete. Se il primo: il nulla assoluto esisterebbe; il che è assurdo (60.); ovvero Dio nel crear la materia avrebbe potuto, come dice il famoso Co. Magalotti (a), fare una Creatura, e quella non essere in nessun luogo, giacche il nulla implica, che ammetta in se luogo alcuno; il che è un altro assurdo. Dunque doveva succedere il secondo, esservi cioè un luogo per la sua collocazione; ma la materia esiste; dunque deve essere esistente anche il luogo, o lo spazio, ed esser perciò un Ente reale, e positivo (14.); il che &c.

S C O L I O.

159. Il Leibnizio ha preteso di sostenere, che lo spazio sia un mero nulla, ponendolo solamente nella distribuzione, e nell'ordine de' corpi coesistenti. Il Cav. Newton, e dopo di esso il Dott. Clarke pretendono, che ne venga un assurdo. „ Il Leibnizio, dice Mr. Voltaire, (b), sostiene

L ne,

(a) *Lettere Familiari Parte I. Lettera XVI.*

(b) *Oeuvres, T. 6. Chap. II. pag. 27. à Dresde 1743.*

„ ne, che lo spazio non è niente altro, se non la rela-
 „ zione, che noi concepiamo tra gli esseri coesistenti, nien-
 „ te altro, se non l'ordine de' corpi, la loro disposizione,
 „ le loro distanze &c. Clarke dopo Newton sostiene, che,
 „ se lo spazio non è reale, ne segue un'assurdità; imper-
 „ ciocche se Dio avesse posto la Terra, la Luna, e il Sole,
 „ dove sono le Stelle fisse col medesimo ordine, in cui so-
 „ no al presente, ne verrebbe, che la Terra, la Luna, e il
 „ Sole farebbero nel medesimo luogo, che occupano presente-
 „ mente; il che è una contraddizione ne' termini „.

160. Per altro l'istesso Leibnizio era una volta di parer
 contrario, e non nega, che, dati gli atomi solidissimi, lo
 spazio non deva esistere necessariamente. Odasi. „ Je deme-
 „ re (*) d'accord de la difference qu'il me (M. Locke) a-
 „ vec beaucoup de raison entre la *Matiere* & l'*Espace*. Mais
 „ pour ce qui est du *Vuide* plusieurs personnes habiles l'ont
 „ crû. M. Locke est de ce nombre; j'en étois presque persua-
 „ dé moi-même, mais j'en suis revenu depuis long-tems. Et
 „ l'incomparable Mr. Huygens, qui étoit aussi pour le vuide
 „ & pour les atômes, commença à faire reflexion sur mes
 „ raisons, comme ses lettres le peuvent temoigner. La preu-
 „ ve du Vuide prise du mouvement, dont M. Locke se sert,
 „ suppose que le corps est originairement *dur*, & qu'il est com-
 „ posé d'un certain nombre de parties inflexibles. Car ~~on~~
 „ ce cas il seroit vrai quelque nombre fini d'atômes, qu'on
 „ pourroit prendre, que le mouvement ne sauroit avoir lieu
 „ sans vuide; mais toutes les parties de la matiere sont di-
 „ visibles & pliables „. Mi lusingo per altro d'aver dimostra-

to

(*) Leibnitii *Epist. ad Hugenfes* per I. Christ. Kortholt. Vol. 4. pag. 407.

to il contrario di ciò, che quest'Autore rinvolto per lo più ne' Sistemi arbitrarij pretende sulla pieghevolezza, e divisibilità della materia a tutta sostanza, avendo io dimostrato, non esservi niente di pieghevole, nè di divisibile originalmente in natura (108:128.131.); e perciò quello, che egli assume per vero, essere una semplice apparenza.

161. Alcuni altri poi in simil guisa argomentano. Lo spazio non è altro, che mancanza di materia; ma la mancanza della materia è un puro nulla; dunque lo spazio è un puro nulla. Questi suppongono ciò, che è in questione; poi che non dimostrano per qual ragione asseriscano, che lo spazio non sia altro, che mancanza di materia; e non dimostrano neppure, che la mancanza di materia sia un puro nulla. In fatti allora sarebbe ciò vero, quando avessero dimostrato, che fuori della materia, e delle spirituali Intelligenze non esistesse, o non potesse esistere altro Ente positivo; il che non hanno fatto, e si può dire, che non faranno giammai. Non essendo dunque dimostrato, che la privazione di materia escluda ogni esistenza di qualunque Ente positivo fuori delle dette Intelligenze, l'addotto argomento va a terra.

COROLLARIO I.

162. La materia per esistere dovendo supporre la preesistenza dello spazio, non può essere a meno, che non sia contingente (61); cioè creata.

COROLLARIO II.

163. Se la materia per esistere ha bisogno dello spazio previo (162.), non può distruggerlo in atto della sua esistenza, o della sua collocazione, ma soltanto occuparlo.

COROLLARIO III.

164. In conseguenza lo spazio è di sua natura penetrabile.

COROLLARIO IV.

165. Lo spazio, come preesistibile alla materia, può esistere senza di essa.

COROLLARIO V.

166. Viceversa poi non si può distrugger lo spazio, senza che resti distrutta la materia.

PROPOSIZIONE XIX.

167. *Lo Spazio è infinito.*

Se non è tale, sarà limitato; dunque i suoi limiti confineranno o col nulla, o con la materia; giacche fuor dello spazio, e della materia, non è nota, eccetto le sostanze spirituali, altra creatura, come già si accennò (133.). Se il primo;
eli-

esisterebbe il nulla, il che è assurdo (60.). Se il secondo; non potendo esser la materia senza il luogo preesistente (158.), e non potendo questo esser distrutto senza che ancor essa distruggasi (166.), ne segue, che confinando l'estremità dello spazio limitato con la materia per l'ipotesi, dovrà necessariamente confinare con altro spazio; onde il limite assegnato allo spazio non sarà limite; ma siccome ogni altro limite assegnatoli non potrà per il medesimo ragionamento esser limite, e così in infinito; ne verrà, che lo spazio debba esser necessariamente infinito; il che &c.

S C O L I O I.

168. Si poteva ciò dimostrare anche in altra maniera, supponendo, giacche lo spazio è penetrabile (164.), che un globo materiale venisse collocato all'ultimo lembo del suo confine in modo, che fosse tangente della sua estremità, ma che per altro rimanesse tutto dentro il detto spazio. Si domanda poi, se giacendo un uomo sovra tal contatto possa, o non possa alzare un braccio fuor di esso. Se concedesi; dunque tal braccio avrà ricetto nel nulla, ed il nulla esisterà, il che è assurdo (60.). Se negasi; dunque vi sarà un ostacolo, il quale sarà formato o da altra confinante materia, o dal nulla, e però si ricaderebbe nel medesimo assurdo, se il nulla esistesse; o il detto limite dello spazio non sarebbe più limite, dovendo continuare con quell'altro spazio contiguo, che da luogo alla materia resistente al detto braccio; il che farebbe contro l'ipotesi.

Lu-

86 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

Lucrezio c' insegna, che fino de' suoi tempi era noto un simile argomento, il quale non è mai stato finora abbattuto. Eccone l' espressione (a):

Præterea si jam finitum constituatur

Omne quod est spatium: si quis procurrat ad oras:

Ultimus extremas, jaciaturque volatilo solum,

Invalidis utrumq; concortum viribus ire,

Quod fuerit missum, major: longeque volare:

An prohibere aliquid censes, obstareque posse?

Alterutrum fatearis enim, sumasque necesse est.

Quorum utrumque sibi effugium præcludis, & omne

Cogis, ut exempta concedas sine patere.

Nam siue est aliquid; quod prohibeat, faciatque

Quo minus quo missum est, veniat, finique locus se:

Siue foras feratur, non est a fine profectum:

Hoc pacto sequar: atque oras ubicunque locaris

Extremas, quæram, quid telo denique fias.

Fies: uti nusquam possis consistere finis:

Effugiumque fuga prolates copia semper.

COROLLARIO. I.

169. Essendo lo spazio infinito per ogni verso (167.), e però un infinito assoluto (17.), dovrà essere necessariamente immobile.

Co-

(a) Lib. I.

COROLLARIO II.

170. Siccome ciò, che è necessariamente immobile, è indivisibile (48.), tale farà ancora lo spazio.

COROLLARIO III.

171. Giacche lo spazio è immobile (169.), e indivisibile (170.), e nell'atto istesso penetrabile (164.); ne segue, che un corpo collocatovi non potendo nè alterarlo, nè distruggerlo con tal collocazione (163.), deve esistere congiuntamente con esso senza che l'uno turbi l'esistenza dell'altro.

COROLLARIO IV.

172. Dunque lo spazio farà ancora impassibile.

COROLLARIO V.

173. Dunque nè la materia esercita azione sullo spazio, nè lo spazio sulla materia.

SCOLIO II.

174. Tutte le idee, o nozioni, che noi abbiamo delle cose, non sono già innate in noi, come il sagacissimo Locke (a) l'ha diffusamente dimostrato, ma ci sono state primie-

ra-

(a) *Essai Philos. concern. l'Entend. & Humain* L. I.

ramente presentate alla fantasia da i nostri sensi, ed in seguito l'abbiamo arbitrariamente combinate, ed alterate per mezzo della riflessione. Che le nostre idee non siano innate, deducesi ancora dalle sacre pagine, come parmi, che giudiziosamente osservi un altro Autore Inglese ^(a). Io ne porrò qui l'estratto fattone a tal proposito dal Dott. Maty ^(b).

„ Le cognizioni (egli dice) de' nostri primi Padri non erano secondo il nostro Autore nè straordinarie, nè sublimi, „ e tutto ciò, che è piaciuto a Milton di raccontarne, non è „ altro, che una bella finzione. Non pare, che Adamo fosse creato Filosofo perfettamente istruito della Natura di „ Dio, e di quella di tutte le Creature. I fatti riportati „ da Moisè smentiscono questa opinione. Animato che ei fu, „ la sua anima fu racchiusa in un corpo, che ne limitava „ le operazioni, che la riduceva a non istruirsi, che lentamente, successivamente, ed a misura che i suoi sensi fornivanli nuove idee. L'immagine di Dio, a somiglianza „ della quale esso fu creato, non significa, che fosse dotato „ di tutta la perfezione, di cui egli era suscettibile, ma „ semplicemente, che la forma esteriore non era simile a „ quella d'alcun'altra Creatura, che era superiore ad ogn'altra, e come diremmo, divina; e che quanto alla sua anima, ella era stata creata immortale, e lo rendeva in „ tal guisa un'immagine dell'immortalità istessa di Dio „.

175. Il Leibnizio nelle sue riflessioni sovra Locke ^(c), pretenderebbe, che vi fossero delle idee innate, e tra l'altre
ge-

(a) Schueksford *The Creation and fall of man &c.*

Or d'OE. 1753. Art. II. pag. 49.

(b) *Journ. Britann. pour les mois de Sept.*

(c) l. cit. pag. 403.

generalmente impresso il principio di contraddizione (51.); ma se ciò fosse, non vi sarebbe persona, che non l'avesse perpetuamente presente; eppure per la prova, che ne ho fatto, moltissime persone idiote muojono, o sono molto vissute, senz'averne mai avuto la minima idea; anzi volendogliela io comunicare, alcuni hanno durato qualche fatica a intenderla, essendomi convenuto replicar loro l'interrogazione. I Ragazzi poi d'una tenera età non ne intendono nulla affatto. Che più? I Filosofi stessi Leibniziani smentiscono la suddetta asserzione del loro Maestro: ed eccone il riscontro. Pretende il Wolfio, e dopo di esso Formey, come altrove ho notato (54.), che dal principio della Ragione sufficiente provenga quello ancora di contraddizione; dunque a buon conto il principio di contraddizione sarebbe secondario, e primario quello della ragione sufficiente, e però questo, e non quello dovrebbe essere stato improntato nell'anima nostra; ma non si ha da far altro, che ripensare al passato, per convincersi del contrario; mentre nella nostra puerilità, ed anche nell'adolescenza, non ne abbiamo avuto la minima idea. Per altro qual maggior convizione, che il vedere un acerrimo fautore di questa ragion sufficiente, come il Leibnizio, che la cercava da per tutto, non accorgersi, che questa (posta per vera la dottrina Wolfiana) era di data anteriore alla Identità? In somma la discrepanza tra 'l Wolfio, e il Leibnizio in fissare il primato tra l'una, e l'altra decide, che niuna di due è innata nell'anima nostra, e in conseguenza, passando amendue per i soli principj semplicissimi, e generalissimi, niun principio è innato nella medesima.

. M

Giac-

90 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

176. Giacche dunque debbono i sensi essere il veicolo principale delle nostre successive cognizioni, ed essi non possono, se non dal materiale, ricevere impressione, come pure disse Lucrezio (a):

Tangere enim & tangi, nisi corpus, nulla potest res;

ne segue necessariamente, che noi non possiamo avere cognizione alcuna diretta della natura dello spazio, e perciò non possiamo formarci di esso alcuna idea, se non negativa, come negativa è pure l'idea dell' Infinito, quantunque con varie proprietà sembri risuonare sulle bocche di alcuni Filosofi, i quali bisognando ne propagano la specie.

S C O L I O III.

177. Piacemi in questa occasione di trasferir qui una spiritosa riflessione del celebre Mr. Voltaire. „ Des-Cartes „ (egli dice) (b) ammetteva un Dio Creatore, e Causa di „ tutto, ma negava la possibilità del vuoto. Epicuro negava un Dio Creatore, e Causa di tutto, ed ammetteva il „ vuoto. Or doveva Des-Cartes per i suoi principj negare „ un Dio Creatore, ed Epicuro doveva ammetterlo. Ecco „ ne la prova evidente. Se il vuoto fosse impossibile, se „ la materia fosse infinita, se l'estensione, e la materia fossero la medesima cosa, bisognerebbe, che la materia „ fosse necessaria. Or se la materia fosse necessaria, esisterebbe „ be

(a) Lib. I.

(b) *Oeuvres de Voltaire T. 6. Chap.*

„ II. pag. 28. à Dresde 1748.

„ be per se medesima per necessità assoluta, inerente alla
 „ sua natura primordiale, antecedente a tutto; dunque ella
 „ farebbe Dio; dunque colui, che ammette impossibilità del
 „ vuoto, deve, se ragiona per conseguenze, non ammette-
 „ re altro Dio, che la materia. Al contrario, se vi è il
 „ vuoto, la materia non è dunque un Ente necessario, esi-
 „ stente per se medesimo &c., perche chi non è in ogni
 „ luogo, non può esser necessariamente in alcun luogo.
 „ Dunque la materia è un Ente non necessario; dunque è
 „ stata creata; dunque toccava a Epicuro a credere, io non
 „ dico, Dei inutili, ma un Dio Creatore, e Governatore;
 „ e toccava a Des-Cartes a negarlo. Perche dunque Des-
 „ Cartes al contrario ha sempre parlato dell'esistenza d'un
 „ Ente Creatore, e Conservatore, ed Epicuro l'ha rigetta-
 „ to? Perche gli Uomini tanto ne' loro sentimenti, che
 „ nella loro condotta, seguono di rado i loro principj, e
 „ perche i loro Sistemi, come le loro vite, sono tante con-
 „ traddizioni.

PROPOSIZIONE XX.

178. *La Materia non è un infinito assoluto.*

La materia è estesa per ogni verso; dunque se fosse in-
 finita, avrebbe un'estensione infinita per ogni verso, e pe-
 rò occuperebbe interamente l'infinito spazio (167.). Ma la
 materia è mobile, e il moto è incompatibile col pieno per-
 fetto materiale (156.), e con l'infinito assoluto; dunque la
 materia non è un infinito assoluto (17.); il che &c..

CAPITOLO QUINTO.

Del Tempo.

PROPOSIZIONE XXI.

179. *C*id, che chiamiamo Tempo, non può esser cosa reale.

Supposto reale, è chiaro, che non può esser costante, cioè immobile; poichè qualunque operazione farebbe passata, presente, e futura nel punto istesso. Non può esser nemmeno dotato d'estensione per ogni verso infinita, perchè essendo immobile, ricaderebbe nel medesimo assurdo. Non potendo dunque esser immobile, suppongasi mobile. Ma non può esser una cosa mobile limitata; imperciocchè per quanto fosse grande la sua estensione, pur finalmente dovrebbe per il suo moto rapidissimo lasciar varie regioni successivamente allo scoperto, onde ne seguirebbero di mano in mano più inconvenienti, cioè in alcuni Paesi vi sarebbe il tempo, ed altri ne resterebbero sprovvisti; onde non si potrebbe sapere di qualunque azione nè il *prima*, nè il *poi*. In oltre tal corso di tempo, per quanto grande si supponesse la sua estensione, pur finalmente dovrebbe cessare di passar tutto quanto sulla materia; essendo que-
sta

sta limitata (178.), ed allora non vi farebbe più tempo nell'ordine materiale, ma passando il detto tempo ad immergersi totalmente nello spazio, ne farebbe il solo spazio, cioè una perfetta immutabilità (169.), suscettibile. Se si volesse supporre, che si aggirasse intorno alla materia, formandovi una specie di vortice, siccome i circoli i più prossimi al centro del moto farebbero i meno veloci, e viceversa, la medesima azione non interrotta si calcolerebbe da per tutto fatta in tempi diversissimi, il che farebbe una confusione. Se si supponesse infinito da una parte, e dall'altra continuamente fluente come un fiume, bisognerebbe, o che egli si muovesse tutto d'un pezzo senza mutar luogo dalla parte infinita, o che questa parte infinita mutasse successivamente di luogo; amendue inconvenienti. In somma finito, o infinito che sia da una parte, bisogna supporre, che dall'altra si allunghi continuamente senza alterare la sua situazione, il che non può fare senza continuamente riprodursi. In tal caso o egli è increato, o creato. Se increato: ciò, che non ha avuto principio, si verrebbe a produrre. Se creato: da se non può proseguire a crearsi, onde farebbe un'occupazione continua del Creatore, il quale avrebbe prodotto una creatura, che non potrebbe terminar mai di creare: amendue inconvenienti.

Ma si può far vedere, che Dio non lo potrebbe nè creare, nè distruggere; imperciocchè è certo, che Dio, come dice l'Ecclesiaste ^(a), credè prima d'ogni altra cosa la *Sapienza*, cioè le Intelligenze, o sostanze spiritali; *prior omnium creata est Sapiensia*. Credè poscia il Cielo, e la Terra;

or

(a) *Cap. I. V. 4.*

94 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

or il *prima*, ed il *poi* sono inseparabili dall'idea di ciò, che chiamasi tempo; dunque Dio ha posto all'atto le creature nel tempo. Se negasi: o non sono state ancor create, il che farebbe contro il passo riportato; o esistono ab eterno, il che è contro le parole: *In principio creavit Deus Cælum, & Terram*; avendole dunque Dio create in tempo, ed avendo esistito prima, e dopo tal creazione, è chiaro, che anch'egli esisterebbe in tempo; ma esiste ab eterno; dunque il tempo in tutta la sua estensione, cioè l'eternità, se fosse una cosa reale separata da Dio (giacche non può esser Dio medesimo come costante di caratteri incompatibili co'divini), sarebbe un Ente coeterno a Dio, e perciò increato. Dunque non avendolo Dio potuto creare, non lo potrebbe in conseguenza distruggere, e però dovrebbe allungarsi da se all'infinito, e generarsi di pianta successivamente, senz'aver pascolo altronde, per cui crescere; vale a dire, sarebbe una cosa increata insieme, e creabile; il che è assurdo (59.); dunque il tempo non ha esistenza assoluta; il che &c.

COROLLARIO I.

180. Il TEMPO è dunque appreso di noi totalmente ideale, come cosa relativa fabbricata dal nostro modo di pensare, e dal nostro bisogno.

S C O L I O I.

181. Ciò, che chiamiamo TEMPO, non significa realmente altro appreso di noi, che una successione uniforme, e continua

nua dell'esistenza delle cose. In fatti quando riguardiamo un corpo, che si mantiene in uno stato di moto, o di quiete, mentre accade interrottamente un ordine di cose successive, noi diciamo, che quel tal corpo è stato tanto tempo in moto, o in quiete, computando dal numero di tali cose successe l'una all'altra, la durata di quel moto, o di quella quiete. Similmente dalla successiva mutazione delle nostre idee possiamo giudicare della maggiore, o minor durata delle cose. Di quest' ordine adunque successivo, ed uniforme, che consideriamo in faccia alla durata di qualche cosa, cioè alla persistenza nello stato, in cui trovasi, ci siamo serviti così costretti dalla necessità per fare una misura, che chiamiamo TEMPO, rappresentandocelo come una grandezza continuamente crescente, il che conferma la definizione, che se n' è data (18.).

COROLLARIO II.

182. Giacche ci possiamo in tal guisa rappresentare il tempo, senza che egli sia realmente esistibile, il pretendere, che Dio l'abbia creato, farebbe un offenderne gli attributi (61.).

COROLLARIO III.

183. Siccome il tempo è relativo al moto, non potendosi dar questo realmente istantaneo (25.), non può esser nemmeno tale il tempo, ed in fatti successione di cose, e istante perfetto sono contraddittorj; il medesimo dicasi della consecuzione delle nostre idee; possiamo dunque dividere il
tem-

96 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

tempo in quante parti ci piace, considerandolo come una linea retta, o altrimenti; ma non possiamo nè concepirlo, nè supporlo infinitamente piccolo, se non relativamente a un tempo esorbitante (86.).

S C O L I O II.

184. Il medesimo vogliono esprimere i Geometri, quando nominano i loro istanti, o tempuscoli. L'istesso intendasi allorchè suppongono uno spazio infinitesimo, o inassegnabile, che il mobile debba scorrere in un tempuscolo; tutti e due sono così supposti per adattarvi il calcolo infinitesimale, e non perchè dianzi di fatto (87.).

C O R O L L A R I O IV.

185. Se cessasse totalmente il moto, o la successione delle nostre idee; o pure se si persistesse continuamente in un'idea sola; in somma se cessasse affatto l'ordine consecutivo delle cose fisiche, e ideali; è chiaro, che non vi sarebbe più il tempo.

C O R O L L A R I O V.

186. Per quanto un circuito di moti, o d'idee, considerato relativamente alla durata d'un'azione, torni più volte da capo a rifare il suo corso sempre nell'istesso modo, tutte le azioni consecutive fatte in ciascuno dei detti eguali circuiti faranno eseguite in tempi eguali; il che dà l'idea del-

dell'eguaglianza, e dell'ineguaglianza; dell'identità, e della diversità del tempo.

S C O L I O III.

187. Il Cav. Newton credeva il tempo realmente esistente: eccone la ragione con le parole del sovrallodato M. „ Voltaire ^(a). Conviene (questi dice) secondo Newton pensare della durata come dello spazio, cioè che sia una cosa reale, poichè se la durata non fosse altro, che un ordine di successioni tra le creature, ne seguirebbe, che ciò, che fa rebbesi al giorno d'oggi, e ciò, che fu fatto migliaia di anni prima, sarebbero per loro stessi fatti nel medesimo istante, il che è contraddittorio „. Questo argomento per altro con tutto il rispetto dovuto a un Uomo sì grande, quale era Newton, non parmi convincente; anzi sembrami un sofisma; imperciocchè ripugnando, che la natura resti un sol momento oziosa (63.), ne segue, che dal principio del Mondo in poi vi dev'essere stato necessariamente un ordine successivo non interrotto giammai; quindi la durata d'oggi si ripeterà da un ordine di successioni, che non potrà esser mai quello di mill'anni prima, quantunque ancor questa da un ordine di successioni ripetasi, giacchè quest'ordine di successioni è onninamente inseparabile dall'idea d'antiorità, e di posteriorità; onde i detti due ordini successivi non potendo mai esser l'istessa cosa, non se ne può dedurre, che le dette due durate debbano essere accadute nell'istesso istante, se però l'espressione *ordine successivo* non si pigliasse astratta-

N

men-

(a) *Oeuvres T. 6. Chap. II. pag. 1* 27. a *Dresde 1748.*

98 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

mente per un Entè sostanziale, il che farebbe un realizzare un'idea attratta, o una voce, contro le buone regole del raziocinio (69.).

PROPOSIZIONE XXII.

188. *Tra le cose create non v'è altro infinito assoluto, se non lo Spazio.*

L'infinitamente piccolo assoluto non è possibile (86.); la materia non è un infinito assoluto (178.); il tempo non può esser cosa reale (179.), le sostanze spirituali, eccetto Dio, non sono ammesse, nè si possono ammettere assolutamente infinite. Or fuori di tali cose non evvi a notizia umana tra le cose create, che il solo spazio, e' questo si è dimostrato, essere un infinito assoluto (167.); dunque lo spazio tra le cose create è il solo infinito assoluto; il che &c.

S C O L I O I.

189. Si presenteranno qui i Geometri co' loro Asintoti, e con l'aree asintotiche, credute da loro realmente infinite; anzi ve ne faranno di quelli, come il Wallis, e il Padre Grandi (amendue per altro d'un merito sommo) i quali contro il Varignon, e il Leibnizio pretenderanno, che dianfi anche i più che infiniti, unito a' quali il Fontenelle produrrà ad un bisogno la sua Aritmetica degl'infiniti. Ma per istrigarfi da questi abissi mentali, basta considerare che tutti questi mostri incompatibili con la buona Metafisica sono parti della pretesa divisibilità all'infinito, la quale sparendo
in

in faccia alle definizioni geometriche (110.111.), e alla forza degli addotti ragionamenti (103. 108. 126. 127.), vengano a sparire anche i sogni, e le larve degli Afintoti, e delle aree afintotiche, onde tutte le gerarchie capricciose di tali infiniti riguardate da tanto tempo con particolare stupore riduconsi a puri Romanzi Geometrici, come spero di meglio dimostrare nel secondo Tomo di quest'Opera.

190. Ma nemmeno i lati d'un Poligono, in cui suol risolversi un perimetro curvilineo, come sarebbe la periferia circolare, dir si possono di numero infinito, come pretendono comunemente i Geometri, se non in senso tropico, o figurato; imperciocchè se lo pretendessero in un senso assoluto, siccome un numero realmente infinito di lati deve esser collocato in un luogo limitato, bisognerebbe, che supponessero possibile l'infinitamente piccolo reale, che è totalmente insostenibile (86.).

191. L'inconsideratezza d'alcuni è anche arrivata a pretendere, che si possa supporre una linea realmente infinita da una, o da ambe le parti; ma se gli Uomini, che hanno inventato di pianta la linea, sono d'immaginazione limitata, è certo, che non potranno mai concepire una linea infinita; e se non possono in alcun modo concepirla, perchè pretendono di poterla supporre tale? Ma supponghiamola assolutamente infinita da amendue le parti; per essere ancor supposta divisibile, non mi si potrà negare, che io da tal linea possa togliere una lunghezza a piacere, che sia ex. gr. di quattro braccia. Toglasi. Domanderò, se dopo tal defalco la detta linea seguiterà ad essere infinita, o se cesserà di esserlo? Se il primo: io le renderò le tolte quattro braccia, e in

conseguenza l'accrescerò di lunghezza. Se il secondo: l'infinito, e il finito non differiranno fra loro, che di quattro braccia; conseguenze amendue incompatibili coll'idea dell'infinito in questione, cioè della lunghezza perfettamente interminabile. Se mi diranno, che si può supporre la linea retta interminabile da una sola parte: siccome non v'è ragione, per cui una linea debba esser supposta più in un luogo, che in un altro, io potrò supporre due tali linee poste per diritto, vale a dire, sommate, e domanderò, se le loro estremità vengono per l'appunto a toccarsi, o se qualcosa manca, o eccede per la formazione d'una sola linea retta. Nel primo caso si supporrebbe la linea perfettamente interminabile già rigettata. Nel secondo, e nel terzo caso a voler che le dette estremità giungano a toccarsi per l'istessa direzione (qual supposizione non può esser negata, perchè viene ammessa la somma degl'infiniti), bisognerebbe, che l'infinito fosse tirato avanti, o in dietro più, o meno, quanto occorresse; ovvero nel secondo caso per fare un'infinita lunghezza mancherebbe una lunghezza finita; e nel terzo si darebbe una lunghezza maggiore della lunghezza infinita; tutti inconvenienti.

192. Forse replicheranno, che essendo lo spazio, per quanto si è stabilito (188.), un infinito assoluto, può Dio per tutta la sua illimitata estensione creare, o aver creato una striscia di materia, o una linea fisica realmente interminabile da uno, o da amendue i lati; ma io rispondo, che nemmeno questo si può supporre, perchè si supporrebbe ancora, che Dio avesse per questo verso esaurita la sua onnipotenza, e però si farebbe suscettibile del principio di contraddizione; il
che

che è assurdo. Spariscano dunque una volta questi Paesi incantati degl'infiniti, i quali, eccetto lo spazio, non in natura, ma esistono soltanto nella riscaldata fantasia de' Geometri; o volendoli ammettere, tanto grandi, che piccoli, non si ammettano, se non come inassegnabili (87.), e relativi (13.).

S C O L I O II.

193. Giacche trattasi dell'infinito, non posso dispensarmi dal fare una riflessione sovra un rapporto messo frequentemente in uso da' Geometri. Questi considerano il zero come il nulla assoluto, e pretendono, che tra esso, e l'unità corra una relazione, come tra l'unità, e l'infinito assoluto; ma ripugna con loro pace, che tra l'*nulla assoluto*, e il *qualcosa* sia possibile qualunque relazione finita, o infinita (60.). Di più se tra'l zero, e l'unità corre un rapporto infinito reale, si avrà l'analogia $0:1::1:\infty$; e moltiplicando i medj, e gli estremi, si avrà $1=0\times\infty$; dal che deducesi, che il nulla assoluto preso infinite volte diventa eguale a quella quantità, che uno vuole; il che nuovamente è assurdo (59.). Per intender dunque in qual significato debbasi pigliare il rapporto del zero all'unità, riflettasi 1.) che se una quantità finita sommasi con una quantità, rispetto ad essa inassegnabile, l'aggregato è una quantità finita. 2.) Se da una quantità finita si sottrae una quantità, che è rispetto ad essa inassegnabile, il residuo è una quantità finita. 3.) Se una quantità finita moltiplicasi per un'inassegnabile, il prodotto diventa una quantità inassegnabile. 4.) Se una quantità finita di-

si videsi per un' inassegnabile, il quoto diviene un' numero eccedente, ed enorme, dimodochè il denominatore al numeratore acquista un rapporto inassegnabile, ma non mai realmente infinito. Suppongasi ora, che il zero sia l'istessa cosa, che è una quantità inassegnabile, vedrassi, che riguardo a' nostri usi le quattro operazioni dell'Aritmetica porteranno al medesimo fine. Dunque il zero nei simboli geometrici dovendo esprimere qualche relazione affermativa, o negativa, ovvero dovendo esser sommato, o sottratto da una quantità notabile, farà sempre la figura d'una quantità infinitesima, ovvero d'un' inassegnabile; ed allora moltiplicato con un numero di quantità finite, che rispetto ad esso passa riguardo a' nostri usi per un infinito, darà per prodotto una quantità finita; onde s'avvererà in tal senso la sovresposta analogia, che altrimenti farebbe una stravaganza.



CA:

CAPITOLO SESTO.

Della forza di aderenza annessa intrinsecamente agli Atomi, e considerata come un carattere generale della materia, indispensabile per l'effettuazione de' fenomeni, che in natura si osservano.

* * * * *

PROPOSIZIONE XXIII.

194. **G**Li Atomi, o corpi primordiali posti nel Vuoto, quando altra causa non vi fosse concorsa, farebbero rimasti immobili in quella situazione, in cui fossero stati collocati.

Imperciocchè siccome fuor di essi non si danno altri corpi (131.), non vi poteva essere cosa esteriore, che in loro producesse alcun cangiamento. Per loro stessi poi non v'è ragion sufficiente, per cui più in un luogo, che in un altro dovessero muoversi (98.N.1.); dunque dovevano restar immobili perpetuamente; il che &c.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

195. *Impresso da una forza esteriore negli Atomi rimasti immobili nel Vuoto un moto qualunque per varie direzioni, si farebbe questo in parte estinto ne' primi incontri; in parte si farebbe andato successivamente estinguendo.*

Si sono gli Atomi dimostrati durissimi (128.); ma nelle vicendevoli percosse i corpi duri, per quanto inegnano i Geometri, perdono continuamente il moto impresso; dunque gli Atomi in questione dovevano in breve tempo ridursi alla quiete; il che &c.

S C O L I O.

196. Fanno i Leibniziani la guerra a' corpi duri, pretendendo, che se questi esistessero, resterebbe violata la legge di *continuità*, e la natura in conseguenza agirebbe per salto, il che stimano essere un inconveniente. Siami permesso, per dare un'idea di questa legge, di trasferir qui le parole del celebre Gio. Bernoulli, come le traduce il dottissimo Padre Riccati (a). „ In effetto un somigliante „ principio di durezza non potrebbe esistere. Egli è una „ chimera, che ripugna alla legge generale, che la materia osserva costantemente in tutte le sue operazioni. Io „ parlo di quell'ordine immutabile, e perpetuo stabilito „ dalla creazione dell' Universo, che si può appellare legge

„ 8^a

(a) *Dialogo delle forze vive, e dell'azioni delle forze morte, Giornata X. pag. 344., e 345.*

„ ge di *continuità*, in virtù della quale tutto ciò, che fi
 „ eseguisce, si eseguisce per gradi infinitamente piccoli. Sem-
 „ bra che il buon senso detti, che verun cangiamento non
 „ possa farsi per salto; per salto non opera la natura. Non
 „ v'ha cosa, che passar possa da un'estremità all'altra, senza
 „ passar per tutti i gradi di mezzo. E qual connessione
 „ si concepirebbe tra due estremità opposte indipendente-
 „ mente da ogni connessione di ciò, che è tra mezzo? Se
 „ la natura potesse passare da un estremo all'altro, per e-
 „ sempio dal riposo al movimento, dal movimento al ri-
 „ pofo, da un movimento al contrario, senza passar per
 „ tutti li movimenti insensibili, che conducono dall'uno
 „ all'altro, egli converrebbe, che il primo stato fosse di-
 „ strutto, senza che la natura sapesse a quale ella dovesse
 „ determinarsi; giacche per qual ragione la natura ne pre-
 „ ferirebbe uno in particolare, di cui si potrebbe chiede-
 „ re, perchè questo più tosto che qualunque altro? Conciof-
 „ siache non essendovi legamento alcuno necessario tra que-
 „ sti due stati, niente di passaggio dal movimento al ri-
 „ pofo, dal riposo al movimento, o da un movimento
 „ all'opposito, ragion veruna non la determinerebbe a pro-
 „ durre una cosa più tosto, che l'altra.

„ So che nella natura vi sono parecchie volte effetti
 „ sì pronti, che non si distingue alcun intervallo tra il
 „ cominciamento, ed il fine dell'azion loro; ma segue egli,
 „ che perciò non ve n'abbia? E quelli, che sono convinti,
 „ che tutti i generi di quantità sono divisibili all'infinito,
 „ avranno eglino difficoltà di dividere il più insensibile tempo
 „ in numero infinito di parti piccole, e di collocarvi tut-

O

„ ti

„ ti i gradi possibili di velocità dal riposo fino ad un movimento determinato, per esempio dal cominciare fino al dissiparsi d' un lampo ?

„ Concludiamo dunque, che la durezza presa nel senso volgare è assolutamente impossibile, e non può sussistere colla legge di *continuità*. Un poco di riflessione metterà questa verità nel suo lume. Supponghiamo, che due corpi duri in questo senso, e perfettamente eguali si riscontrino direttamente, con velocità eguali. Io dico, che dovranno per necessità fermarsi tutti ad un colpo in urtandosi, o dopo l' urto per lo stesso cammino tornare indietro ; giacche cosa assurda sarebbe, che due corpi duri si penetrassero. Ma questi corpi non potrebbero ad un colpo fermarsi senza passar di botto dal movimento al riposo, dall'essere al non essere, ciò, che ripugna alla legge di *continuità*; nè potrebbero riflettersi nel secondo caso, cioè a dire, cangiar le velocità loro affermative in velocità negative, senza aver toccate avanti tutte le diminuzioni successive dalla primiera velocità fino alla total sua distruzione, e senza acquistare per somiglianti accrescimenti una velocità in senso contrario ; ciò che è egualmente opposto a questa legge „.

„ E queste ragioni son di tal sorta, onde non mi sembra punto possibile, che la durezza presa in quel senso, che per noi si rigetta, possa quadrare alle leggi fondamentali della natura. Perciò io rigetterò li pretesi Atomi perfettamente solidi, che parecchi Filosofi hanno ammessi. Questi sono corpuscoli immaginari, che non hanno realtà, se non nell' opinione de' difensori loro „.

197. Il Padre Boscovich gran difensore di questa legge di *continuità*, sopra la quale posa la dimostrazione diretta del suo in parte accennato Sistema (90.), dice anch' esso, che una forza opposta ad un corpo messo in moto, nel ridurlo alla quiete, deve, per salvar la legge di *continuità*, diminuirne la velocità, col farlo passare per tutte le velocità decrefcenti intermedie fra 'l moto, e la quiete. *Hinc autem* (sono sue parole) *etiam in velocitatis productione in mechanica consequitur illud: nullam mobile ab uno aliquo velocitatis gradu transire ad quietem, vel ad majorem velocitatem, nisi per omnes intermedias velocitates transiendo* (*). Posto ciò dopo d'aver pronunziato, che se due corpi duri dopo l'urto passassero subito a causa dell'immediato contatto dal movimento alla quiete, si darebbe il fatto in natura, che per lui è un orrore: ne tira la conseguenza, che non possono mai venire al contatto con le medesime velocità, che prima avevano, e perciò gli è giuoco forza il diminuire successivamente queste velocità allorché sono in viaggio, dimodoche la loro differenza avanti il contatto, o al più nel contatto, totalmente svanisca. Ma perchè non v'era ragion sufficiente, che questa velocità da se sola diminuisse, per mantenersi sempre la materia nello stato, in cui trovasi, o di moto, o di quiete (98.), ha chiamato in ajuto, coerentemente all'apparenza d'alcuni fenomeni, una forza ripuliva fasciante in sfera, ed attorniante i corpi, della quale si serve per fare, che una tal velocità resti successivamente diminuita fino all'intera estinzione.

O 2

A me

(*) *Diff. de materiae divisibilitate, &c.* | *sopra la Fisica, e Istoria naturale di*
principiis corporum §. 68. V. Mem. | *diversi Valentuomini T. 4. p. 221.*

A me per altro questa legge di *continuità* non solamente non fa grand' impressione, almeno riguardo al moto; e alla quiete, ma tengo, che il corpo in moto non possa ridursi alla quiete, se non per salto, ed eccone la ragione.

Giacche un corpo in moto volendo ridursi alla quiete, deve passare per tutte le velocità intermedie decrefcenti, io domando, se quella velocità, che si suppone immediatamente previa alla quiete, sia quanta, o non quanta. Se quanta: essendo, secondo i principj de' Fautori di tal Silema, divisibile in altre minori, non resterà realmente svanita la differenza, che passa dalla prima velocità all'ultima, e perciò il corpo non farà passato per tutte le velocità possibili decrefcenti, e così sempre; il che è contro l'ipotesi. Se non quanta: si darà la velocità infinitesima reale, cioè si darà l'infinitamente piccolo assoluto; il che è assurdo (86.). Dunque non potendo accadere il secondo, e non essendovi altro caso fuori del primo, o il corpo in moto non potrà mai ridursi alla quiete, o verrà violata la legge di *continuità*; ma la prima deduzione è ocularmente falsa; dunque dovrà avverarsi la seconda; e però il corpo nel passare dal moto alla quiete deve ridursi necessariamente per salto.

198. Per maggior chiarezza, già cche la velocità infinitesima assoluta non può darfi, e che perciò la velocità immediatamente previa alla quiete dev'esser quanta, vadanfi incontro due corpi eguali con quella velocità ultima, dopo la quale deve accadere immediatamente la quiete; appena essi entreranno nella reciproca loro sfera ripulsiva, è chiaro, che dovranno per questa opposizione ridursi di colpo alla quiete; altrimenti la fissata velocità non sarebbe l'ultimamente previa
alla

alla detta quiete, contro l'*ipotesi*; il che dimostra, che il passaggio dal moto alla quiete deve indispensabilmente succedere per salto.

199. Consideriamo ora inversamente la questione (74). Se un corpo, che è in moto, deve passare alla quiete per tutti i gradi intermedj di mobilità, anche vicendevolmente un corpo, che è in quiete, dovrà, per evitare il salto, scorrere per varj gradi di quiete prima di giungere al moto. Qualmente sana è suscettibile di simile stravaganza? Ma se non dovrà passare per tutti i gradi di quiete, siamo da capo; poichè o dovrà passare addirittura nella serie crescente de'moti per un moto realmente infinitesimo, o per un moto quanto; ma il primo ripugna; dunque sarà vero il secondo, e però sarà inevitabile il salto a dispetto della legge di *continuità*. A me per altro sembra, che il volere adattare la legge di *continuità* al moto, e alla quiete sia l'istesso, che il volerla adattare al contatto, e non contatto; e sfido chiunque a farmi intendere, che un corpo nel lasciar di toccare in un punto un altro corpo debba passare per tutti i gradi decrecenti di contatto per giungere al non contatto, o alla distanza. Ma parmi tempo perduto il maggiormente trattenermi su tal soggetto, e lascio ad altri l'esaminare le opposizioni fattevi da M. de Maupertuis ^(a), e da M. Mac-Laurin ^(b).

200. Inforziono qui altri emuli, i quali pretendono di proscrivere i corpi duri, per la ragione, che dandosi questi, la somma delle forze vive dopo la percossa non si conservereb-

<p>(a) <i>Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc.</i> <i>& bell. lett. de Berlin. an. 1746.</i></p>	<p>Newton trad. de l'Angl. liv. I. Chap. IV. p. 90. liv. II. Chap. p. 124.</p>
<p>(b) <i>Decouvertes Philosophiques de M.</i></p>	

rebbe. Ma risponde per me M. de Maupertuis ^(a), dicendo:
 „ Des-Cartes ammesse questi corpi duri, e credette d'aver trovato le leggi del loro moto. Egli si era partito da un principio assai verisimile, che *la quantità di moto conservasi sempre l'istessa in natura*. Ne dedusse delle leggi false, perchè il principio non è vero. I Filosofi, che son venuti dopo di lui, son rimasti impressionati d'un'altra conservazione; questa vien da essi chiamata *Forza viva*, che è il prodotto della massa nel quadrato della sua velocità. Essi non hanno già fondato le loro leggi di moto su questa conservazione, hanno bensì dedotto questa conservazione dalle leggi del moto, di cui hanno veduto, che ella era una conseguenza. Per altro siccome la conservazione della forza viva non aveva luogo se non nell'urto de' corpi elastici, si sono confermati nell'opinione, che non si desero altri corpi fuori di essi in natura „.

„ *La conservazione del moto non è vera, che in alcuni casi. La conservazione della forza viva non ha luogo, che per alcuni corpi. Né l'una, nè l'altra può passare per un principio universale, nè per un risultato generale delle leggi del moto* „.

201. Vi è un altro ostacolo da formontare, che trovasi nel sovrallodato Padre Riccati ^(b). „ Abbiamo (dice Lelio) due leggi nella natura; la prima, che forza non si distrugga, senza produrre effetto di contusione, o altro simile; l'altra, che non si possa avere un movimento novello senza causa, che lo determini. La prima legge vuole, che due
 „ corpi

(a) l. cit.

(b) *Dialogo delle forze vive, e dell'...*

zioni delle forze morte, *Giornata X. pag. 342., e 343.*

„corpi eguali perfettamente duri, che vanno all'urto con eguali velocità, con le stesse ritornino indietro. La seconda legge comanda, che essi si fermino. Queste due cose insieme non sono combinabili; dunque, se fossero possibili i corpi perfettamente duri, l'una, o l'altra delle leggi della natura verrebbe meno, e per conseguenza essi non sono possibili „. Al che rispondo, che in quanto alla prima legge, ella non può aver quella generalità, che le vien regalata; imperciocchè è noto in meccanica, e si dimostrerà nel secondo Tomo di quest'Opera, che un corpo mosso da due forze cospiranti, cioè agenti per direzioni, che fanno angolo, è costretto a passare per la diagonale d'un parallelogrammo, i di cui lati vengono espressi tanto da dette forze, che dalle loro direzioni; nella qual occasione venendo essa diagonale a denotare la forza, con cui il mobile cammina, vedesi manifestamente, che il corpo non può muoversi con una forza, che sia la somma delle forze motrici, perchè tal diagonale è minore della somma de' due lati esprimenti le dette forze, e perciò una parte di forza, e in conseguenza una parte di moto deve necessariamente restar distrutta. Ora i Pianeti nel descrivere le loro Orbite, essendo mossi da più d'una forza nel tempo istesso (100.), debbono obbligatamente passare per innumerabili diagonali, come pure accade a tutti i progetti; onde rimane in essi incessantemente distrutta qualche porzione per piccola che sia di forza impressa in loro congiuntamente dall'azione delle forze centripeta, e proiettizia; ma qui non succede contusione; dunque tal prima legge non merita, torno a ripetere, il nome di *universale*.

Mi

202. Mi farà opposto, che quella legge riguarda soltanto la percossa. Al che replico, che a volere stabilire per questo verso l'impossibilità de' corpi duri, bisogna dimostrare, che la contusione, o l'ammaccamento de' corpi per urto procede dall'esser la materia sostanzialmente, e non apparentemente cedente, e molle; ma ciò è stato più supposto, che dimostrato, come ho altrove avvertito (85.); dunque il ragionamento contro l'esistenza de' corpi duri è vacillante, e inconcludente; anzi siccome parmi d'avere addotto delle buone ragioni contro questa pretesa mollezza, bisognerà confessare, che la contusione altro non sia, che il disgregamento degli atomi forzati dall'urto ad uscire dal loro posto, e a farsi luogo altrove. Aggiungo, che le dette due leggi non solamente non sono incompatibili con i corpi duri, ma sono conciliabili co' medesimi in occasione di spiegare il fenomeno importantissimo dell'elasticità. Per altro non è questo il luogo a proposito, per parlarne fondatamente. A me basta d'avere al presente richiamato, se pur non m'inganno, i corpi perfettamente duri dall'esilio, a cui alcuni Filosofi con raziocinj forse più ingegnosi, che veri, gli avevano condannati, e d'aver rimesso la materia in possesso dell'impenetrabilità, e dell'estensione, che gli erano state tolte in compensazione della divisibilità, che m'è convenuto involarle.

PROPOSIZIONE XXV.

203. *Venendo gli Atomi ne' varj loro incontri a mescolarsi, si farebbero mantenuti sempre slegati.*

Non potendovi essere alcuna forza corporea esteriore (131.), che li forzasse a stare insieme attaccati, ed essi essendo di
lor

1

PARTE PRIMA, CAPITOLO VI. 113

for natura inflessibili, e durissimi (128.), e tutti d'un estrema piccolezza (come dimostra la successiva divisione de' corpi), non v'è ragione alcuna favorevole, per cui dovessero rimaner insieme connessi, e per così dire abbracciati. Dovevano dunque restar sempre slegati; il che &c.

PROPOSIZIONE XXVI.

204. *Gli Atomi stanno insieme attaccati con una manifesta tenacità.*

Quando si vuol dividere qualunque corpo, egli mostra sempre più o meno resistenza a tal divisione con una particolare tenacità, quantunque finalmente divida; ma ogni corpo non è altro, che una congerie di atomi insieme confusi, ed ammassati (128.); eglino dunque son quelli, che mostrano tal resistenza alla dissociazione; ma se non vi fosse una forza, che li tenesse collegati, essi rimarrebbero slegati per la Proposizione antecedente, nè darebbero il segno, che danno, di tenacità; dunque debbono necessariamente stare alla vicendevole aderenza con qualche forza; il che &c.

PROPOSIZIONE XXVII.

205. *La forza, che tiene gli Atomi collegati, non può procedere dalla loro configurazione.*

Se ciò fosse, bisognerebbe supporre gli atomi uncinati, o configurati in maniera, che scambievolmente intralciandosi, e avviticchiandosi, si mantenessero fermi al contatto; in tal caso è manifesto, che non vi sarebbe corpo divisibile; ma

P

i cor-

114 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

i corpi sono successivamente divisibili per esperienza; dunque tal divisione richiederebbe la frattura del supposto intralciamento, e in conseguenza degli atomi, i quali perciò sarebbero divisibili, e frangibili contra ciò, che si è stabilito (128.); non può dunque la configurazione degli atomi esser causa efficiente della loro collegazione (204.); il che &c.

COROLLARIO.

206. Non si può dunque fare a meno di non supporre gli atomi di mole per ogni verso estremamente circonscritti, voglio dire di figura sferica, ovale, cubica, cilindrica, retta &c.

S C O L I O.

207. Ho supposto la figura ritorta, e uncinata, come l'unica, che sia atta a ritenere gli atomi al conforzio. In fatti gli Epicurei, e i Gassendisti credevano, che i corpi ripetessero la loro durezza, o sia la tenacità delle loro particelle componenti da tanti piccolissimi uncini, ed ami, co' quali rimanevano reciprocamente collegate, ed intralciate le dette particelle di figura ramosa. Odisi Lucrezio (a):

*Denique quæ nobis durata, ac spissa videntur,
Hæc magis hamatis inter sese esse necesse est,
Et quasi ramosis alte compacta teneri,
In quo jam genere in primis adamantina saxa
Prima acie constant ictus contemnere sueta,
Et validi silices, & duri robora ferri.*

PRO-

(a) Lib. II.

PROPOSIZIONE XXVIII.

208. *La forza, che mantiene gli Atomi scambievolmente aderenti, non può essere esteriore.*

Fuor degli atomi non può esser materia, che gli atomi (131.), e in conseguenza forza, che li predomini con l'impulso, o con la pressione; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO:

209. Se la forza, che mantiene gli atomi alla vicendevole aderenza, non può essere esteriore, ne viene per necessaria conseguenza, che sia loro propria, agente con essi, ed intrinseca totalmente alla loro massa.

PROPOSIZIONE XXIX.

210. *La forza collegante gli Atomi ad un tenace coesivo era assolutamente necessaria per le produzioni dell'Universo.*

Non si possono successivamente eseguire nuove produzioni in natura senza quell'aderenza delle parti, onde la materia risulta (204.), il che è per se manifesto; perchè senza una forza motrice, e collegatrice l'opposizione, e l'attacco di parte a parte non si farebbero; ma gli atomi, se rimanevano nel vuoto privi d'una forza collegatrice, sarebbero restati disciolti, ed insociabili (203.), e perciò niuna produzione delle innumerabili, che vannoni incessantemente

P 2

for

116 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

formando in natura, farebbe stata possibile; dunque era necessaria, e indispensabile a questo fine una tal forza; il che &c.

COROLLARIO I.

211. Essendo una tal forza necessaria, e indispensabile agli atomi per le successive produzioni, ne segue, che ella dovrà essere inseparabile, indelebile, ed immutabile, per così dire, alla loro sostanza; sicché bisognerà confessare che ella sia un carattere della materia impressibile da Dio, o nell'atto della Creazione, come l'impenetrabilità, la configurabilità, e l'estensione, ovvero (il che è più probabile) dopo tal creazione, come il moto; e siccome l'origine degli altri caratteri materiali non ha avuto l'essere, che dall'arbitrio di un agente libero, qual è Dio, ne segue, che non si può, nè si deve rispondere altrimenti riguardo a tal forza a chi ne ricercasse il primo principio, appunto come se fosse ricercato il nascimento de' menzionati caratteri, non si può, nè si deve ricorrere ad altra sorgente, che al volere d'un Dio Creatore.

S C O L I O I.

212. Mi potrebbe forse esser fatta la seguente obbiezione. Potendo esser un corpo senza moto, concludono i Filosofi, che il moto non è essenziale alla materia; onde potendo per i primi principj esistere gli atomi senza la forza d'aderenza, quantunque non idonei alla produzione delle cose, ne verrebbe egualmente, che non fosse nemmeno tal
for-

forza essenziale alla materia. Al che rispondo, che questo non prova, che la detta forza non esista, come dal non esser il moto essenziale alla materia non si può tirar la conseguenza, che egli non vi sia. Ora a me basta, che la forza in questione esista, qualunque sia l'aspetto, con cui venga riguardata, e però tal obbiezione farebbe nulla in quanto al mio fine.

COROLLARIO II.

213. Giacche la forza collegante gli atomi è un carattere impresso in loro, almeno come il moto (212.), ne segue, che debba essere universale; cioè che non possa darfi atomo, che ne sia privo, come accade riguardo agli altri caratteri, primarj, o secondarj che siano.

S C O L I O II.

214. Per altre ragioni ancora ripugna, che la forza collegatrice degli atomi non sia per essi universalmente diffusa; imperciocchè se Dio avesse creato degli atomi senza tal forza, vi farebbero nella materia delle porzioni inette alla produzione successiva delle cose (210.); in conseguenza vi farebbe della materia oziosa, e però Dio avrebbe creato delle cose inutili, il che è assurdo (63.). Dall'osservarsi poi, che un mucchio d'arena si mantiene slegato, da un falso, da un metallo, che spezzati, o in qualunque modo divisi, non si riuniscono come prima, con tutte le diligenze di rimettere le rotture al contatto, non si deve inferire un'ec-

118 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

un'eccezione alla regola generale; ma vedrassene la ragione a suo luogo, cioè nel terzo Tomo di quest' Opera.

COROLLARIO III.

215. Dall'universalità di questa forza (213.214.) deducesi per necessaria conseguenza, che ella esser debba reciproca; imperciocchè se nel corpo A è stata impressa una forza per unirsi all'aderenza con qualunque altro corpo, si dovrà unire anche al corpo B; viceversa se il corpo B possiede una forza d'unirsi all'aderenza con qualunque altro corpo, deve farlo necessariamente anche con il corpo A; e però tal forza fra due corpi dev'esser reciproca; sicchè tutta la materia è sottoposta invariabilmente a questa legge, quando sia posta nelle debite circostanze.

PROPOSIZIONE XXX.

216. *Le forze, che mantengono gli Atomì alla vicendevole congiunzione, sono di diverso calibro.*

Gli atomi formano tante classi di qualità diverse (143. 144.); dunque v'è più ragione favorevole, che forze diverse accompagnino sostanze differenti, che viceversa. Ma tal diversità vien confermata dall'esperienza nella varia tenacità de' corpi, la quale proviene da una forza inerente alla lor massa (209.); resta dunque provata la Proposizione.

Co:

COROLLARIO.

217. E' chiaro, che tutti gli omogenei si accoppieranno, o si stringeranno insieme con una forza costante, o sia con la medesima forza; ma la classe omogenea A riterrà fra' suoi atomi una forza di tenacità differente da quella, che esercita tra' suoi la classe B, e così dell'altre. Similmente un atomo della classe A con un atomo della classe B non solo eserciterà una forza d'aderenza diversa da quella, che esercitava con un suo compagno, o sia con un altro omogeneo, ma diversificherà da amendue i detti casi per ciò, che riguarda l'attacco con un atomo della classe C; e così in seguito.

PROPOSIZIONE XXXI.

218. *La forza di reciproca aderenza negli Atomi non solo agisce al contatto, ma a qualche distanza ancora.*

Molti fatti provano questa verità. Un fascetto di raggj, che passi vicino ad un corpo, s'inflette verso di quello talmente, che rimangono più piegati i raggj più prossimi. La calamita, ed il ferro operanti anche nel vuoto artificiale la mostrano ad evidenza. Si getti una porzione di mercurio corrente nel fondo sufficientemente ampio di un vaso, che contenga qualche quantità d'acqua, poi si agitano i due fluidi con legno, o con altro arnese in maniera, che la massa mercuriale resti nel fondo del vaso sparpagliata in porzioni; osservarsi poscia, lasciato il tutto in quiete,

te, e vedrassi, che alcune porzioni mercuriali ballantemente prossime, scacciata dopo qualche tempo l'acqua intermedia, correranno impetuosamente a vicenda ad unirsi: segno evidente, che in quiete tendevano ad avvicinarsi; perchè se ciò non fosse, non avrebbero potuto scacciare l'acqua frappolta. Se si pone un corpo convesso sulla superficie dell'acqua, lanciassi ella subitamente dopo il contatto ad inondarlo tutt' all'intorno, alzandosi sopra il proprio livello, e così innalzata a dispetto dell' Idrostatica sostenendosi. Se si espone un ampio foglio di carta, o una pezzuola asciutta, o umida in qualche distanza da un carbone fumante, il fumo, ogni volta che l'una, o l'altra se li presenti, va dopo un poco di tempo piegandosi verso di esse, e finalmente si diffonde per la loro superficie; quali tolte dalla sua vicinanza, egli torna subito al suo posto, come ho mille volte osservato. Il segno però più evidente ci vien somministrato dalla gravità, la quale agisce ad enormi distanze per procurare la reciproca aderenza delle parti materiali. Tralascio altri fatti, che concordano cogli esposti a rendere evidente la Proposizione.

PROPOSIZIONE XXXII.

219. *La forza reciproca d'aderenza negli Atomi, che agisce anche in distanza, era assolutamente necessaria per la conservazione delle produzioni, e per l'effettuazione de' fenomeni, che in natura si osservano.*

Se tal forza non agisse in distanza, i progetti alla superficie terrestre, e i corpi celesti non potrebbero descrivere illo-

i loro viaggi curvilinei; in somma non si darebbero moti in natura se non rettilinei. La nostra Terra adunque si troverebbe in tal distanza dal Sole, che farebbero già da gran tempo distrutte le sue produzioni. Il che essendo per se manifesto, non si può dubitare, che manifesto non sia ancora l' assunto.

S C O L I O.

220. Per esser tanto tra' Filosofi contrastata l' origine di questa forza operante sì al contatto, che in distanza, e pretendendo molti di essi, che da un ambiente d'una particolare attività i di lei effetti provengano; quantunque siasi direttamente dimostrato, se non erro, il contrario, parmi per ulterior conferma indispensabile il metter in vista le incongruenze, e le assurdità, che nascerebbero dal supporre quest' Oceano arbitrario, fasciante non solo la materia tutta, ma trapassante attraverso la medesima, insinuantesi imperiosamente per tutte le di lei porosità, ed esercitante sovr' essa quel dominio tirannico, che i suoi Inventori le vanno gratuitamente regalando. Mi sia per altro concesso, che io supponga note in quest' occasione alcune dottrine, che dalle precedenti dimostrazioni non derivano.



Q

CA.

CAPITOLO SETTIMO.

Degl' inconvenienti , che provengono dal sistema d' un fluido universale non solo fasciante , ma penetrante per li pori i corpi tutti , e formante col suo rapido movimento , o con la pressione , o con la forza elastica i fenomeni della gravitazione , e dell' aderenza de i detti corpi .



PROPOSIZIONE XXXIII.

221. **E** *Insostenibile l'ipotesi d' un fluido gravifico , che in qualunque modo muovendosi produca il fenomeno della Gravità .*

Se si suppone muoversi in linea retta , bisognerebbe farlo necessariamente passare per il centro della Terra , e allora da una parte i corpi anderebbero dalla periferia verso il centro , dall' altra si muoverebbero dal centro alla periferia ; il che è contrario all' esperienza . Se si supponesse , che tal materia gravifica si precipitasse da ogni parte per linee rette

rette convergenti al centro Terrestre, giunta che vi fosse, o dovrebbe annichilarsi, il che è assurdo, o dovrebbero dall'incessante incursione reciproca continuamente turbarsi i suoi movimenti per elastica, o inelastica, che concepiscasi; onde anche la legge de' gravi cadenti si verrebbe continuamente a turbare; il che pure è smentito dall'esperienza. Se si suppone muoversi circolarmente, è noto, che non ad un sol centro comune dovrebbero i corpi radunarsi, ma a'centri rispettivi di tutti i cerchj paralleli, che il fluido formerebbe nel rotarsi, di qualunque figura suppongasi il suo volume; onde la Terra farebbe di figura cilindrica, o prossimamente tale, il che pure è contrario all'osservazione. Se tal materia formasse nel girare tanti circoli eguali, e concentrici interfecantisi vicendevolmente in due punti opposti a guisa di due Poli, il reciproco incontro ne turberebbe subito la regolarità, e tutto andrebbe ben presto in disordine; onde i corpi da tal fluido sospinti in vece di precipitare ad un centro comune, andrebbero a posarsi in più luoghi, se pure il torrente, da cui venissero guidati, continuamente ripercosso permettesse loro la quiete. Non essendovi dunque altro caso più favorevole degli addotti a tale ipotesi, resta provata la Proposizione.

S C O L I O.

222. L'ingegnossissimo Des-Cartes inventò i Vortici a fine di spiegare la Gravità, non pigliandosi pensiero d'esaminare la sua Ipotesi, se compatibile, o no, fosse con la natura; ma tal Romanzesca opinione è oggimai totalmente

Q 2

in-

insostenibile con tutti gli sforzi d'ingegno i più ostinati de' più industriosi seguaci di detto celebre Autore, i quali per quanto abbia preteso di pertinacemente difenderli per un puro spirito, cred' io, di partito, pure veggono la loro causa affatto perduta, quantunque ne scappi fuori di quando in quando qualcheduno a girare a tondo con essi. Il famoso Giovanni Bernoulli ne confessò ingenuamente l'insufficienza.

„ Si è conosciuto, (egli dice) ^(a), da molto tempo, che
 „ nell'idea, che dà Des-Cartes per ispiegare coll'azione
 „ de' suoi Vortici la causa della gravità, i corpi gravi non
 „ dovrebbero tender direttamente al centro, ma perpendicolar-
 „ mente all'asse di questi Vortici; l'esperienze fatte in se-
 „ guito hanno confermato questa obbiezione, essendosi vedu-
 „ to, che una sfera di vetro piena d'acqua fino a una par-
 „ te, che conteneva dell'aria, o una materia liquida di mi-
 „ nor densità dell'acqua, essendo rotata rapidamente intor-
 „ no al suo asse, quest'aria, o questa materia meno den-
 „ sa si adunava, non già intorno al centro in figura di glo-
 „ bo, ma più tosto lungo l'asse, e formava un nocciuolo
 „ allungato, avvicinantesi alla figura cilindrica, relati-
 „ vamente alla natura delle forze centrifughe, la qual vuol
 „ le, che le parti, che ne hanno meno, come sono le
 „ meno dense, cedano alle più dense, che hanno maggior
 „ forza centrifuga, e tendono per conseguenza verso il
 „ centro del cerchio parallelo all'equatore della sfera, va-
 „ le a dire, perpendicolarmente al suo asse. Leggasi sovra
 „ di ciò il discorso di M. Bullfinger „. Tentò M. Bullfin-
 „ ger di riparare a quest'inconveniente, ma come dice il
 me-

(a) Joh. Bernoulli *Opera* T. 3. | N. 146. §. 9. pag. 272.

medesimo Bernoulli ^(a), lo fece con maniera più ingegnosa, che verisimile. Tutto ciò si può vedere esattamente disteso nella *Fisica sperimentale* dell' Abate Nollet, Tom. II. Sezione II. Lez. V. delle forze centrali, Esperienza IV. con quel, che segue, dove conoscerassi, che l' esperienza ripugna al progetto del detto Bulfingero. Merita ancora, riguardo a' Vortici Cartesiani, e Malebranchisti, di esser letta la *Replica* di M. Sigorgne a M. de Molieres, o sia *Dimostrazione Fisico-Matematica sull' impossibilità, ed insufficienza de' Vortici*. M. de Voltaire porta undici dimostrazioni contro la Romanzesca esistenza di questi Vortici ^(b); e il celebre P. Jacquier ne dimostra ancor esso ^(c) elegantemente al suo solito l' incongruenza.

PROPOSIZIONE XXXIV.

223. *E' insostenibile il preteso assioma; che un moto; o una tendenza al moto supponga necessariamente un altro moto impellente.*

Imperciocchè se un moto deve indispensabilmente esser prodotto da un altro movente, domanderò, chi farà agire questo secondo, e così sempre. Non vi farà dunque un limite in tal soluzione, vale a dire, farà infinita la serie delle cause producenti un effetto; il che è inconveniente (57.); onde è fuor di dubbio la Proposizione.

Co-

(a) L. cit. §. 7. pag. 269.

Edit. de Dresde a. 1748.

(b) *Oeuvres de M. de Voltaire* T. 6.
 Part. III. Chap. II. pag. 177. seq.

(c) *Instit. Philos.* T. 3. Par. I. Sect. I. pag. 131., e seg.

COROLLARIO I.

224. Per tal ragione si domanderà, chi muove il fluido gravifico per quel verso, che più piace a' protettori di tal chimera? Se essi risponderanno, un altro fluido, faremo da capo, e così in infinito; vi vorrebbero dunque infiniti fluidi comunicantisi il moto, il che è assurdo.

COROLLARIO II.

225. Bisognerebbe dunque arrestarsi a un primo mobile, il quale dipendesse immediatamente dalla mano, per così dire, del divino Artefice. Ma se il divino Artefice ne dovesse essere il Motore primario, dovrebbe ancora star continuamente occupato a riparar le perdite di moto precedenti dal reciproco soffregamento della materia, il che denoterebbe imperfezione nella macchina. E' più conforme adunque a' divini attributi l'aver dato Dio alla materia una forza intrinseca, ed inerente, come si è dimostrato nel precedente Capitolo, che l'addossargli l'inconveniente d'aver fatto una creatura imperfetta, o pure (il che torna il medesimo) l'aver fatto per il più ciò, che far poteva per il meno.

S C O L I O.

226. Il celebre Ugenio nella sua Dissertazione *de causa Gravitatis* così sul principio si esprime, *Gravitas enim cum*

cum sit nifus quidam, inclinatiove ad motum, debet verofimiliter oriri ab aliquo motu. Il Tummiggio fimilmente nelle fue Iftituzioni della tenebrofa Filofofia Wolfiana ^(*) parla con quefta franchezza. *Pender enim gravitas a materia interlabente; Gravium enim motus conftanter acceleratur, & ver- fufus centrum Telluris dirigitur, vi obfervationis. Supponit igitur caufam externam. (§. 46. Cosmolog.). Qui aliter fen- tiunt, & gravitatem a caufa naturali independentem ima- ginantur, rationem, potentem numinis voluntatem unice al- legantes, eam in numerum qualitatem occultarum referunt, hoc eft, Entium fua natura inexplicabilium, differentiam inter ve- ritatem, & fomnium non capientes. (§. 10. Ontol.).* Almeno l'Ugenio ha frappofto alla fua afserzione la parola *verofimi- liter*, ma il Tummiggio pone la fua opinione per una ve- rità afoluta. Dica per altro quel, che egli vuole, gli con- verterà fempere, volendo foftenere la fua opinione, ricorrere ad una prima caufa, che dia il moto alla fua materia inter- labente, o a una ferie di tali materie, quando non pretèn- deffe, che la prima fi muoveffe da fe a capriccio, il che farebbe un' empietà contraria ancora a' fuoi ftelfi principj. Vi farà dunque più motivo di chiamar vifionaria, e fognata la detta fua materia interlabente, e de' fuoi feuguaci, che *qualità occulta* la forza inerente alla materia per pro- durre la gravità; tantopiù, che per la medefima ragione l'impenetrabilità, il moto &c. meriterebbero un tal nome, non potendofi allegare altra ragione della loro efiftenza, fe non la volontà del Creatore, come altrove fi diffe (211.).

PRO-

(*) *Inft. Phil. Nat. Cap. III. §. 52.*

PROPOSIZIONE XXXV.

227. *Non può ammettersi un fluido gravifico rotante intorno al centro terrestre, senza supporre tacitamente, che egli vi gravi, cioè senza supporre ciò, che è in questione.*

Non potendo un corpo messo in moto da un solo agente scorrere una traccia curvilinea (100.), converrà necessariamente supporre intorno di esso più forze motrici; o che Dio sia continuamente occupato in applicarvi nuove forze, per mutarne ogni momento le direzioni. Se il secondo; ne succederebbero gli altrove accennati inconvenienti (225.), che è inutile il replicare. Se il primo; giacche devonsi presceglie sempre la maggior semplicità (63.), consideriamo due soli agenti, cioè una forza, da cui il corpo viene spinto per la tangente, ed un'altra, da cui egli è determinato verso il punto fisso. E' noto per la dottrina de' moti composti, e delle forze centrali, che egli debba in tal contratto prendere la strada di mezzo per tante insensibili diagonali, e girar continuamente attorno al detto punto fisso, variando la curvità al variar del rapporto di dette due forze, e descrivendo l' aree proporzionali a' tempi. Non possono in altra maniera esser considerati due agenti per far, che un corpo si aggiri intorno a un punto fisso. Non potendo dunque il nostro fluido in questione escir di questi limiti nel rotarsi intorno al centro terrestre, ne segue necessariamente, che anch' egli dovrebbe per un verso esser vibrato per una linea retta, e per un altro tendere al detto centro; sicche esso pure quivi di sua natura gra-

graviterebbe, anzi tutto vi ruinerebbe di fatto, supposto; che il moto impulsivo venisse a cessare; come viceversa tolta questa tendenza, tutto si dissiperebbe, fuggendo per la tangente. Con che dimostri, che quei medesimi, che non ammettono gravità ne' corpi, se non per la circolazione d' un fluido a lor capriccio, nel dare a questo fluido l' esecuzione di far gravitare i corpi, non possono dispensarsi dal supporre tacitamente anch' esso gravitante, vale a dire dal supporre ciò, che è in questione; il che &c.

S C O L I O.

228. La medesima tacita supposizione fece nel luogo citato l' Ugenio, allorquando rotato il fluido d' un cilindro, pretese, che da tal rotazione soltanto, e non da altra causa, la cera di Spagna dispersa per il fluido fosse portata al centro della base, su cui il detto cilindro posava; ma se non vi fosse stata la gravità, la detta cera in vece di raccogliersi al centro di detta base, sarebbe restata immobile in quella situazione, in cui al termine del moto rotatorio si fosse ritrovata, vale a dire sarebbe rimasta diffusa nella cavità del cilindro senza discendere; amMESSA poi la gravità col lasciare in quiete il cilindro, in cui l' acqua rotavasi, la detta cera, la quale per l' impeto giratorio impressole dall' umore non ubbidiva ad essa gravità, diminuito tal impeto nell' umore per la quiete, e per il soffregamento delle pareti del vaso, cominciò a secondarne la forza, che se le faceva momentaneamente superiore. Doveva dunque ubbidire nel medesimo tempo 1.) al moto impressole dal fluido, che segui-

R

tava

tava più lentamente a menarla in giro. 2.) all'altro moto de' circoli aquei, che ripercossi dalla parete cilindrica dovevano retrocedere verso l'asse del medesimo vaso, diminuendosi continuamente per il soffregamento laterale. 3.) alla gravità, che la forzava sempre più alla discesa; sicche gli era necessario il pigliare una strada di mezzo, girando a un tempo, e precipitando, e passare in conseguenza per una spirale continuamente convergente verso l'asse del detto moto, e nella totale estinzione coincidente con la di lui estremità, cioè col centro della base.

PROPOSIZIONE XXXVI.

229. *Il fluido gravifico non può produrre il fenomeno della gravità, nemmeno quando si voglia, che a tal fine agisca per sola pressione.*

In tal caso questo fluido agirebbe in ragione delle superficie esteriori; onde è evidente, che que' corpi, che avessero maggior superficie, farebbero più sospinti al basso, il che è falso per l'esperienza. Ma si pretende, che egli per l'enorme sua sottigliezza s'insinuï dentro le porosità de' corpi, e ne inondi per ogni verso i componenti, dicendosi dagli antagonisti, che ogni corpo ha la sua materia propria, ed una straniera, che ne penetra li pori, circolandovi liberamente. Supposto dunque corporeo un tal fluido, e concessa una tal penetrazione, ne segue, che egli non potrà contuttociò intromettersi fra i contatti esattissimi, co' quali le particelle elementari formanti un corpo stanno al reciproco immediato combaciamento; imperciocchè per piccoli, che concepiscansi tali
com-

combaciamenti, son sempre quanti, in conseguenza analoghi ad una perfetta solidità, e però al decantato fluido totalmente impervj; altrimenti la materia farebbe penetrabile, contra ciò, che si è dimostrato (81.). Converrà dunque dalla pressione al detto fluido accordata defalcare tali contatti. Ma l'estensione di tali contatti per quanto in due elementari particelle, o molecole sia piccola, pure risguardo a un numero esorbitante di esse dev'esser notabile. Dunque quanto più un corpo avrà raccolti all'immediato contatto i suoi componenti, meno verrà compresso, e perciò meno dovrà pesare, e viceversa; sicche un pezzo d'oro ex. gr. quanto più sarà infranto, e spicinato, dovrà più pesare, che quando era massiccio. Per la medesima ragione due fluidi, che uniti insieme riducansi in un volume di minor somma de' due volumi separati, dovrebbero per quest'ipotesi pesar meno, che quando eran divisi; il che pure è contrario all'osservazione.

Ma quando anche le particelle conformatrici de' corpi fossero tutte tante sferette eguali, e che il detto fluido comprimente le facesse scendere equiveloci, bisognerebbe, che questo avesse una specie d'intelligenza per seguir da per tutto la Terra, e ciò sempre in una tal positura, che le convergenze delle sue pressioni andassero da ogni parte dirette al di lei centro, altrimenti resterebbero turbate, o annichilate le leggi della gravitazione.

In somma o questo fluido comprimente suppone un altro fluido compressivo, e così in seguito all'infinito; o gli è ingenerata una tal forza compressiva; o Dio è continuamente occupato in comprimerlo. Se il primo: ne verrebbe un inconveniente (57.) Se il secondo: si verrebbe ad attribuire a tal

fluido una semovenza assoluta, il che è un' empietà; ovvero si supporrebbe ciò, che è in questione, facendo grave ciò, che deve produrre la gravità (227.), con che si supporrebbe tacitamente ciò, che negasi apertamente. Se il terzo: si farebbe imperfetta l'opera del sommo Creatore, o se gli farebbe far per il più ciò, che far poteva per il meno, il che è assurdo (61.); resta dunque dimostrato l'asuito.

PROPOSIZIONE XXXVII.

230. *Se fosse vero il fluido gravifico, o circolante, o comprimente, dovrebbe esser costante in qualunque luogo della Terra, determinandovi invariabilmente a un punto fisso tutti i corpi senz'eccezione.*

Questo fluido si suppone da' suoi Creatori così sottile; che possa intrudersi senz'ostacolo in ogni corpo, e per servirmi della frase del Tummiggio ^(a), passare anche per li pori dell'oro, come l'acqua per una rete: Ma i celebri Geometri Francesi hanno osservato al Perù, che il Pendolo in faccia al monte Cimborafo non fermavasi perpendicolare alla superficie della Terra, ma rimaneva in sito alquanto obliquo verso quella smisurata Motagna, formando costantemente colla perpendicolare all'orizzonte un angolo di sette, o otto seconde. Ecco per conferma le parole istesse di M. de Mauper-
„ tuis ^(b). M. Bouguer & de la Condamine envoyés par le
„ Roy au Pérou, ont trouvé qu' une très-grosse Montagne
„ appellée Chimborazo, située fort près de l'Equateur, atti-
„ roit

(a) *Instit. Philos. Nat. Cap. III. §.* | (b) *Discours sur les différentes figures des Aslres.*
35.

„ roit à elle le plomb qui pend au fil des Quart-de Cercles:
 „ Et par plusieurs observations des hauteurs des Etoiles pri-
 „ ses au Nord & au Sud de la Montagne, ils ont trouvé
 „ que cette attraction écartoit le fil à plomb de la Vertica-
 „ le d'un angle de 7" ou 8". Or siccome tal monte non po-
 „ teva essere al detto fluido gravifico di remora, e non essen-
 „ dovi ragion sufficiente, per cui tal aberrazione del pendolo
 „ dovesse senza causa farsi più in un luogo, che in un altro
 „ (53.), bisogna concludere, che questo fluido non avrebbe,
 „ come pretendono, legge costante, e non avendola, deve pas-
 „ sar per supposto, ed erroneo, ed esser perciò rigetabile, co-
 „ me quello, che non è valevole a spiegare i fenomeni.

In oltre se l'operazione d'esso fluido fosse costante, una goccia d'acqua, o d'olio, o di spirito di Nitro &c. posta tra due lastre di vetro ben levigate, inclinate all'orizzonte, e che dalla parte più bassa siano un poco aperte, mentre dalla più alta fanno angolo, non salirebbe con moto accelerato (al contrario di tutti i corpi liberi) allorchè trova un'angustia bastante. Ciò dimostra la famosa Esperienza dell'Haukbee (*) replicata col medesimo successo da' Fisici più celebri. Nè questa salita debbesi attribuire alle varie concorrenti circostanze, 1.) perchè succede egualmente nel vuoto; 2.) perchè se l'apertura delle dette lamine vitree sia un poco meno angusta, che non è quando la goccia sale, la goccia allora si arresta, e se cresce un poco più, la goccia discende.

Bastano questi due esempj senz'addurne altri, per togliere non solo l'universalità all'ipotesi del fluido gravifico, e dimostrarne con ciò l'insufficienza; quanto ancora per far vedere,

(*) Esperienze Fisicomeccaniche tradot- | te a Firenze nel 1716. Sezione V.

dere, come nel caso secondo, che detto fluido produrrebbe due moti totalmente opposti, ed in conseguenza agirebbe contra se stesso; il che è anche peggio; è dunque evidente la Proposizione.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

231. *Un fluido girante, o premente non può esser causa sufficiente della varia durezza de' corpi.*

Se si supponesse girante, sarebbe di necessità l'ammettere innumerabili Vortici, giacche in ogni luogo, e tempo, e per ogni verso si fanno le aderenze de' corpi. Questi Vortici adunque debbono necessariamente intersecarsi, ed intralciarsi, a voler, che in ogni luogo possibile segua tal coesione; onde se son materia, e se agiscono sulla materia, debbono essere anch' essi inevitabilmente sottoposti alle leggi universali dell'impulso, e in conseguenza è impossibile, che i loro moti non debbano interrompersi, e scompigliarsi: con che i fenomeni delle particolari aderenze de' corpi dovrebbero anch' essi apparire ne' medesimi soggetti, e nelle medesime circostanze variabili; ex. gr. il volume dell' istessa pietra, o dell' istesso metallo verrebbe a possedere or maggiore, or minore tenacità di parti, trasportato da luogo a luogo; e in conseguenza diversa si troverebbe assai spesso la sua gravità specifica, a proporzione, che il vortice, in cui s'abbattesse, più o meno ne ferrasse insieme le parti. Aggiungasi, che nello scompiglio de' Vortici si dovrebbe vedere scompigliarsi ancor la figura de' corpi, e ciò molto frequentemente, mutati che questi fossero di situazione; il che è onninamente opposto all'esperienza.

sperienza. Ma quando si volesse, che la famiglia vorticosà non restasse turbata dalla detta incurfione, ne seguirebbe, che tutti i corpi sarebbero da essa ridotti ad una figura con-fimile, dovendo i loro componenti nella rotazione andare a situarsi intorno all'asse del moto, e pigliare, come altrove si disse (222.), una figura prossima alla cilindrica; il che pure è ocularmente falso.

Nella supposizione poi del fluido premente, facendosi, come si è detto, la coesione de' corpi in ogni luogo, e tempo per qualunque direzione, ed anche per direzioni opposte riguardanti innumerabili punti diversi, bisognerebbe supporre, che fossero sparse da per tutto porzioni di questo fluido, le quali stringessero i componenti corporei per ogni verso; ma quelle porzioni non potrebbero nondimeno eseguire tutte le coerenze, se i corpi, che debbono essere indurati, e agglutinati da loro, non incassassero per l'appunto dentro il loro ambito, altrimenti esse farebbero suscettibili di azioni contrarie nel tempo istesso, il che ripugna. Ma se v'abbisognasse una tal congruenza, vi sarebbero de' luoghi, ove la coesione si disfarebbe spesso spontaneamente, cioè senza causa apparente; imperciocchè ponendo più quà, o più là un corpo, dovrebbe questi dividerli in due nel passare sopra i confini di due volumi contigui di tal fluido, giacchè ognuno agisce con direzione opposta all'altro; il che ancora è falsissimo.

In oltre se il fluido comprimente fosse d'una sola natura, tutte le aderenze, e in conseguenza tutte le durezza de' corpi sarebbero eguali, o quasi eguali; altra manifesta falsità. Converrebbe dunque ammettere, o diversi fluidi compressivi dotati di varia forza, ognuno de' quali pigliasse di mira, e
fice-

128 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

scegliesse costantemente la sua qualità di materia, per renderla coesa fino ad un certo segno, e non più, dimodoche due, o più fluidi s'accordassero a mettere in com. 112 ognuno la sua, per farne all'occorrenza un misto d'una durezza terza, o neutra; ovvero un sol fluido che avesse la proprietà di gettarsi addosso a tutti i corpi, per indurirli più, o meno, con l'avvedutezza però di dare la medesima durezza a' corpi della medesima specie, dimodoche se da qualche forza esteriore alcuni rimanessero divisi, o infranti, in alcuni casi egli fosse sollecito a riunirli, ed in alcuni altri non si pigliasse pensiero di ridurli alla primiera aderenza; il che farebbe il medesimo che dare a questo fluido in ambi i casi esaminati un'intelligenza, ed una facoltà d'agire a capriccio: assurdo insostenibile. Peggio poi, se si pretendesse, che Dio sia occupato continuamente da per tutto a dare a queste porzioni la dovuta forza compressiva, variandone l'energia secondo il bisogno, o la legge prefissasi; è dunque manifesto l'assunto.

PROPOSIZIONE XXXIX.

232. *Supposto il fluido in questione dotato d'elasticità, e di varia densità, è insostenibile, che possa produrre gravità, e aderenza ne' corpi.*

Se la refrazione della luce nascesse dalla densità di questo fluido diversa in luoghi diversi, come è inclinato a credere il Cav. Newton ^(*); o questa densità si mantiene sempre l'istessa a' suoi luoghi, o va vagando a piacere. Se il primo: tutte

(*) *Optic. Part. III. Quest. XIX.*

tutte le refrazioni dovrebbero in quel tal luogo esser sempre l'istesse, qualunque corpo d'equal volume vi fosse collocato; il che è contrario al fatto. Se il secondo: non succederebbero le refrazioni costanti rispetto al medesimo corpo situato in diversi luoghi, perchè si potrebbe incontrare in diverse vaganti densità; il che parimente è falso.

Se questo mezzo, o fluido, o etere (chiamasi come si vuole) supposto di natura rarissima, si volesse, che fosse molto più raro nel Sole, ne' Pianeti, nelle Comete, e nelle Stelle fisse, che a varie distanze dalle loro masse, e che andandosi gradatamente condensando rispingsesse con la sua esorbitante elasticità i corpi verso i luoghi, dove è più raro, producendo in tal guisa la gravità, come opina il detto Newton ^(a), io formo questo raziocinio. Quanto maggiore è l'elasticità, che possiede un corpo, cioè quanto più vigorosa è la restituzione in sito delle sue parti, tanto maggior forza richiedesi per farne la compressione, e perciò tanto maggior resistenza incontra il corpo comprimente nel caricarne la molla. Or al fluido in questione vien data dal suo Autore un'ecedente forza elastica ^(b); dunque un Pianeta, che muovesi per esso, deve nel piegarne le parti incontrare una molto notevole resistenza. Nè importa, che il detto fluido suppongasì rarissimo, perchè questa resistenza si ripete non dalla massa come tale, ma da un reniso eccessivo alla compressione, qualunque sia la massa urtata. Se dunque è indispensabile una vigorosa resistenza di tal fluido, a quest'ora il sistema Planetario dovrebb'essere dalla Creazione in qua molto alterato, se non totalmente distrutto. Nè a ciò si at-

S

tra-

(a) *L. cit. Prop. XXI.*| (b) *L. cit. Quæst. XXII.*

traversa il vedere, che il fluido Elettrico, quantunque dotato di molto vigore, non serve d'ostacolo sensibile ad un corpo, che vi passi per mezzo, perche, tralasciando altre considerazioni, per esser tal fluido un volume sciolto, cioè per mancarli da ogni parte un punto d'appoggio, è chiaro, che non può far resistenza, come resistenza non può fare una molla, o un arco il più robusto, che dalla parte opposta alla compressione non abbiano dove puntarsi.

Ma come sarà spiegata l'azione di questo fluido riguardo a un corpo, che lasciato in libertà cade verso la Terra, o verso un Pianeta sì primario, che secondario? Se un corpo esente da qualunque forza di gravità, o di tendenza, suppongasi posto dentro ad un fluido elastico, che lo spinga ad un punto fisso, ogni Pianeta dovrà essere attorniato da un volume d'etere dotato di densità graduate, che si adattino alla sua massa; ma ogni Pianeta sì primario, che secondario, muovesi continuamente in grandi orbite Ellittiche; dunque un tal fluido per produrre la solita gravità, dovrà seguitare anch'esso il viaggio del suo Pianeta; altrimenti i medesimi corpi di questo potrebbero esser suscettibili di gravitazioni, che possedessero alla medesima distanza sollecitazioni diverse alla discesa. Ma qual causa renderà quel fluido così pedissequo de' Pianeti? Se un altro fluido, faremo sempre da capo; dunque non v'è altro rifugio, che o il darli cognizione, o il tenere il Creatore incessantemente occupato a tal effetto. Amendue assurdi. Dubito poi, che le Comete traversando nel loro passaggio questi volumi d'etere, e portando seco anch'esse il loro immenso volume, dovrebbero con tanti cangiamenti indotti nella

nella regular densità di quest'etere aver apportato a quest'ora una notabile alterazione nel Sistema, con averne turbate, e scompigliate le regulari gravitazioni; il che è contrario a ciò, che fin adesso è stato osservato.

In oltre siccome la gravità, e le forze di coerenza seguono leggi, ed intensità diverse, come dimostrerò a suo luogo, e siccome le coerenze fanno per tutte le direzioni anche diametralmente opposte, bisognerà ammettere da per tutto varie radunate d'etere diversamente denso, ed elastico, acciò possano produrre effetti diversi, come sono le varie durezza, e le differenti tenacità de' corpi. Ma un istesso corpo trasportato in più luoghi mantiene inalterabile la sua nativa durezza, e tenacità, il che fanno pure diversi corpi trasportati in un medesimo luogo; dunque un tal fluido non è atto a produrre per mezzo della sua varia densità, ed elasticità il fenomeno della coerenza, se non si volesse, che ogni volume del medesimo si gettasse addosso al suo corpo appropriato, per ridurlo alla sua stabilita durezza, il che è un inconveniente anche nella prova dell' anterior Proposizione rigettato.

Che se il Cav. Newton pretendesse, che tal virtù del suo etere procedesse, come nel fluido Elettrico, da un'esplosione, o che egli agisse per vibrazioni, o per un principio attivo qualunque, domanderò donde nasca in quest'etere un tal principio attuofo? Se da un altro principio attuofo, faremo nuovamente da capo. Se si vuole, che Dio glie l'abbia infuso nell'atto della Creazione (giacche ripugna che esso etere l'abbia libero per natura); siccome tanto l'etere, quanto i corpi sono materia, faranno suscettibili degl'istessi

caratteri, come in fatti i corpi tutti, o posseggono attualmente, o sono nel caso di possedere l'elasticità, che l'etere possiede; onde non v'è implicanza a dire, che Dio poteva senza ricorrere a quest'etere, dare a' corpi tutti addirittura un tal principio di semovenza. Dal che deducesi, che col supporre, che Dio l'abbia dato ad un tal etere, acciò so- spinga a più punti fissi i corpi dell' Universo, se gl'impurebbe un'imperfezione (61.). Tanti inconvenienti adunque bastano per dare alla Proposizione la dovuta evidenza.

S C O L I O.

233. L'amor de' Sistemi, che tiranneggia tuttavia le menti de' Filosofi, quantunque assai meno de' tempi andati, fa sì, che Uomini per altro dottissimi abbiano ammesso addirittura questo fluido gravifico, o sia etere, o materia sottile, senza esaminarne la natura, e con ciò la convenienza, o l'inconvenienza per la spiegazione della gravità, e della coerenza. Essi hanno fissato per tesi infallibile, che queste proprietà della materia provengano da un principio meccanico, onde senz'ascoltare altre ragioni, vanno a tentone cercando qual sia la natura d'un fluido, che le produca, re- nendo per un'altra verità innegabile, che questo fluido vi sia. Ma ciò è un voler forzar la natura, e non un seguir- tarla ne' suoi andamenti. Io non gli nego di fissare la pri- ma tesi, ma unicamente per esaminarla; gli nego il fissar- la per infallibile, quando non ne hanno potuto trovare pro- babilità alcuna, che escluda gl' inconvenienti. Peggio poi si è l'attaccare l'altrui opinione sostenente, esser la gravità
un

un carattere impresso da Dio nella materia, e ciò con declamazioni ridicole più tosto, che con ragioni dimostrative, quando in qualunque maniera vogliano essi supporre la lor materia sottile, bisogna, che accordino, un primo Motore di essa; sicche eglino pure son forzati di venire lor mal grado al miracolo, che rinfacciano agli altri (a). In oltre se coloro, che pretendono, che la gravità non provenga da pressione esteriore, parlano erroneamente di questo preteso carattere della materia, ciò non giustifica gli Antagonisti a ripulire tale opinione, potendo esser verissima una cosa, benché sia mal provata. *Est interdum* (dice Cicerone) *ita perspicua veritas, ut eam infirmare nulla res possit, tamen est adhibenda interdum vis veritati, ut eruatur* (b). Dovrebbero dunque più tosto esaminare spassionatamente, e rigorosamente la questione, e non ricavar la conseguenza dall'uso erroneo, che i difensori della nostra opinione fanno alle volte del raziocinio.

234. Quelli poi, che si sono dati un pò di pena d'esaminare tal etere, ne hanno alla fine confessato l'insufficienza. Ma ciò, che poteva servire ad alcuni d'un giusto pretesto per il ripudio, gli ha fatti traboccare in una maggiore stravaganza, giacche tutto dovevasi nel senso loro rinuovare, fuorché togliere il detto fluido già fissato indubitatamente per vero. Eccone un esempio ricavato dall'Istoria dell'Accademia Reale delle Scienze, e belle Lettere di Berlino (c). Dopo d'aver quivi l'eruditissimo Segretario esposta l'opinione del celebre Eulero, cioè che un fluido sottilissimo sia quello,

(a) Joh. Bernoulli *Opera omnia* T. 3. | (b) *Pro Quintio*.

N. 146. pag. 308. §. 50.

(c) *Ann.* 1745. pag. 31.

lo, che produca la gravità, e il peso, così segue a dire;
 „ La materia sottile istessa, da cui proviene la gravità, sarà ella soggetta all'Ipotesi di M. Euler? Imperciocchè
 „ questo fluido, qualunque egli sia, è sempre materiale, e
 „ se l'essenza della materia consiste in aver un certo grado
 „ di densità, si potrà dir con giustizia, chè le particelle di
 „ questa materia sottile sono altrettanto dense, quanto le
 „ molecole de'corpi. Ma grandi sono gl'inconvenienti, che risultano da questa opinione, perchè allora non si può fare a
 „ meno di separare le particelle della materia sottile sì lungi l'una dall'altra, per produrre un vuoto sufficiente a
 „ spiegare il movimento, che non si potrebbe più concepire
 „ come una tal materia produca la gravità. Imperciocchè
 „ è incontrastabile, che il fluido, che cagiona la gravità, debba essere estremamente compresso; e la maniera d'accordare una tal compressione con particelle dissipate, ed allontanate l'une dall'altre? Queste difficoltà impegnano
 „ M. Euler ad adottare un altro sentimento, e a concepire
 „ la materia sottile costituente il fluido produttore della gravità, come d'una natura tutt'affatto differente dalla materia, di cui i corpi sensibili son composti. Vi saranno dunque due specie di materia, l'una, che fornisce l'appoggio a tutti i corpi sensibili, le di cui particelle hanno tutte la medesima densità, che è molto considerabile, e
 „ che sorpassa di gran lunga quella dell'oro; l'altra specie di materia sarà quella, di cui questo fluido sottile, che produce la gravità, è composto, e che noi chiamiamo *l'Etere* „. Così dunque sarà mai questa gratuitamente supposta materia di nuovo getto? Chi ne potrà avere una mini-

ma

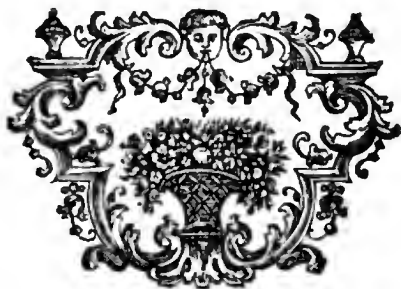
ma idea, non che dimostrarne una sola proprietà - concepibile, che non coincida con quella della vecchia materia, e che in conseguenza non incorra negli addotti inconvenienti? Tant'è! Abortiscono talvolta anche i grand'ingegni.

235. Il Dott. Cheyne divenne anche egli ciecamente appassionato del fluido Newtoniano. „ Un tal fluido, egli dice ^(a), „ può esser la causa di tutti gli altri misterj segreti, e impenetrabili della Natura, e la medesima cosa, come effettivamente io lo credo, che il fluido, o spirito elastico infinitamente sottile di Newton; e ciò che egli non ha fatto, io non credo che alcun altro intraprenda a fare; vale a dire di determinarne la natura specifica, ovvero la sua esistenza, o la sua non esistenza. Ma se la sua esistenza non è dimostrabile, ella è almeno estremamente probabile. Io ammiro da una parte un parlare sì decisivo, dall'altra resto attonito in vedere la sua irrisolutezza, ora predicando questa forza d'unione come annessa alla materia, e come un principio intrinseco, che non riconosce meccanismo; ora come un effetto d'un meccanismo proveniente da un fluido elastico; la seconda sua opinione si è qui trasferita; la prima si può vedere ne'suoi Principj Filosofici di Religione naturale ^(b).

236. La causa, per cui gli Antagonisti hanno mostrato tanta ostinazione in negare un tal principio intrinseco, può risponderli nel vecchio assioma, *non datur alio in distans*; ed in fatti siccome si pretende da' Newtoniani, che un corpo tira a se un altro corpo situato in distanza, ne verrebbe, che il corpo attraente agirebbe dove non è; ma io spero di poter
in

(a) *Dict. Univ. de Medec. trad. de* 1638.
F. Angl. de M. James T. 5. pag. (b) *Capit. 1.*

dimostrare a suo luogo che una forza emanante da un corpo non può sempre agire in tal occasione inversamente al quadrato della distanza, che è la legge della gravità; onde non vi resta altro compenso, che il dire, che due corpi, i quali si avvicinano reciprocamente per legge di gravità, si muovano originalmente l'uno verso l'altro con una specie di tendenza quasi spontanea, ed allora ecco sparito l'orribile assioma, perchè ogni corpo nel muoversi verso un altro per propria tendenza o inclinazione, agisce sempre nel luogo dove è, e non più dove non è. In questo senso intendo di parlare, quando dico, che una tal forza agisce in distanza. Così può pronunziarsi, che una Bestia agisca nel suo genere in distanza, allorchè tende, o muovesi verso un oggetto distante, che appetisce, tantopiù che allora diciamo, che un tal oggetto la tira.



CA-

CAPITOLO OTTAVO

Contenente alcuni Corollarj generali consecutivi allo stabilimento superiormente fatto d'un principio attivo inerente alla materia.



COROLLARIO I.

237. **C**hiusa dunque ogni strada alla possibilità d'un fluido agente in qualsivoglia maniera per produrre la gravità, e la coerenza de' corpi, bisogna necessariamente concludere, che, se queste non si possono assolutamente ripetere da cause estrinseche, forza è, che siano interne, ed inerenti a' corpi, e che perciò si debbano riguardare come caratteri impressi da Dio a guisa degli altri nella materia. Il che essendosi ancora direttamente dimostrato in tutto il Capitolo VI., resta tantopiù convalidata tal dimostrazione dall'esclusione totale di tutte l'altre cause assegnabili.

T

Co-

COROLLARIO II.

238. A torto dunque esclamano alcuni, accusando i seguaci del nostro partito d'aver rimesso in campo le cause occulte de' Peripatetici, che nulla spiegano, e con ciò tacendo quest'opinione, come un rifugio d'ignoranza; mentre la forza stabilita, si è dimostrato, essere un carattere necessario alla materia, acciò si mantenga in quell'ordine or successivo, or fisso, in cui Dio l'ha posta, il quale nell'avergliela infusa ha scelto per il detto fine la più corta, e più semplice strada dell'altre. Che se poi cosa sia questo carattere nella sua origine è a noi totalmente inaccessibile, possiamo dire, torno a ripetere, esserci egualmente incomprendibile, cosa siano in origine l'impenetrabilità, la continuità, l'estensione, il moto &c., quali essendo i caratteri primari improntati da Dio nella materia, ad esso unicamente, e non al nostro corto intelletto, è riservato il penetrarne l'essenza.

COROLLARIO III.

239. Erra dunque il Des-Cartes, pretendendo (a), che tutta quanta la Fisica possa spiegarsi, e dimostrarsi col solo meccanismo, cioè a forza di Teoremi, e di Problemi puramente meccanici; ed erra pure il Newton, sopponendo, che tutti i fenomeni in natura provenir possano da impulso, ammettendo a tal effetto, come si disse, un mezzo, o un essere

(a) *de Trochlea.*

PARTE PRIMA, CAPITOLO VIII. 147

tere elasticissimo, e rarissimo, produttore di esfi, senza pensare in qual modo quell'etere abbia un principio permanente di movimento, e di elasticità.

COROLLARIO IV.

240. Per quanto si dimostrasse, esservi realmente un fluido sottilissimo (ex. gr. la luce) circondante, o inondante i corpi, egli pure sarà materia, e perciò soggetto alle medesime leggi, alle quali questa soccombe, vale a dire, inetto a produrle originalmente, come i fautori del fluido gravifico pretenderebbero.

COROLLARIO V.

241. Non si può far dunque a meno di non riconoscere in natura due cause generali; l'una, che procede dal meccanismo; l'altra, che da esso non proviene nè punto, nè poco.

COROLLARIO VI.

242. Giacche l'effetto del principio attivo risedente nell'intimo della materia si considera come una forza, e che in conseguenza gli effetti da essa prodotti possono essere eguali a quelli d'una forza meccanica, ne segue, che non solamente è possibile, ma succede di fatto in natura, che effetti eguali possono molte volte provenire da cause riguardo alla loro origine non eguali; onde anche per tal ra-

T 2

gio-

148 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

gione si è pronunziato, che gli effetti sono proporzionali a quelle cause, che agiscono sempre nell' istesso modo (55.).

COROLLARIO VII.

243. Giacche tutta la materia tende alla reciproca unione tanto in distanza, che al contatto (215. 218.), se un corpo si muoverà per andarsi ad unire con un altro corpo, ancor questo farà in grado, essendo in libertà, di muoversi verso di quello. L' istesso dicasi di tre, e di più corpi liberi posti nelle debite circostanze, ognuno de' quali dovrà avere un' intancabil tendenza verso tutti gli altri nel tempo istesso.

COROLLARIO VIII.

244. Che se uno di tali corpi sia ritenuto da una forza superiore a quella di tal tendenza, resterà fisso, ed immobile, mentre gli altri anderanno a congiungersi, o con esso, o tra loro, ma non cesserà mai di ritener sempre la sua tendenza verso ciascuno di essi, per esserli questa intrinseca, ed indelebile. Il medesimo dicasi di due o più corpi, che vengano affatto impediti di potersi scambievolmente avvicinare.

COROLLARIO IX.

245. L' impulso dovrà esser la massima parte delle volte un effetto di questa forza, giacche egli non può esser
la

PARTE PRIMA, CAPITOLO VIII. 149

la causa, ma bensì essa di lui, come si è veduto a lungo nell' antecedente Capitolo. Convien dunque confessare, che ella abbia la principale almeno, e quasi l' intera parte nella produzione de' fenomeni in natura. Di tanta importanza era la di lei fondamentale cognizione.

COROLLARIO X.

246. Per quanto resti un pezzo di materia solitario, ed immobile, non rimane perfettamente ozioso, e sprovvisto di questa forza inerente. Non ozioso; perchè essendo ogni pezzo di materia un ammicchiamento d' atomi, che vicendevolmente si stringono all' aderenza, vedesi chiaramente, esser egli continuamente occupato a mantenere alla reciproca unione, ed al vicendevole abbracciamento, per così dire, le sue parti; dal che deducesi, che la materia è in una continua azione dal di lei interno unicamente proveniente. Non sprovvisto di detta forza intrinseca rispetto a' corpi, che possano venire dall' esteriore, perchè appena sopravviene uno di tali corpi, egli non impedito la manifesta, e la deve manifestare, come il corpo in quiete manifesta l' attitudine a muoversi quando è percosso, perchè tanto il moto, che la detta forza, si è fissato nel sesto Capitolo, essere indelebili dalla materia per volere del Creatore.

Co-

COROLLARIO XI.

247. Non è dunque la materia onninamente passiva, come quella, che agisce indipendentemente da cause fisiche esteriori, quantunque determinatamente, cioè verso di altra materia con leggi fisse, e non altrimenti.

S C O L I O.

248. Non vorrei, che taluno precipitando, come è solito, il giudizio, tirasse dalle cose dette qualche illegittima conseguenza. Io non ho preteso mai d'interferire, che la materia abbia femovenza assoluta, cioè che muovasi a capriccio, come un ente pensante libero, ma bensì obbligatamente, giacche nella supposta sua attuosità resta indispensabilmente determinata. Questa determinazione toglie ogni sospetto di libertà, come è per se manifesto; perchè se Dio le ha dato una forza intrinseca, per cui muovasi quasi spontaneamente, glie l'ha data con una legge, e con una restrizione inviolabile, il che non può mai chiamarsi agire ad arbitrio; ed in fatti se ella agisse ad arbitrio, potrebbe un corpo andare, o non andare verso un altro, rimosso ogni ostacolo possibile, e stare, o non stare alla di lui aderenza, secondo che fosse il suo piacimento; ma ciò è assolutamente falso, come ripugnante ad un'invitta esperienza, la quale fa vedere, che un corpo non trasgredisce giammai questa legge, finché qualche impedimento da lui insuperabile non si frappone all'esecuzione. Il dottissimo DONATO ROSETTI

PARTE PRIMA, CAPITOLO VIII. 151

fetti chiamò questa forza addirittura *sponsanea*, ma può ben giudicarsi, che anche egli lo diceva con la notata restrizione. Aggiungo, che non sarebbe se non soperchieria l'addossarmi una tal opinione, non essendo stata addossata a coloro, i quali hanno finora creduto, che un corpo attraesse realmente un altro corpo, e che farebbero nel medesimo caso, perchè a pigliar in cattivo senso una tale azione, vi concorrerebbero i medesimi inconvenienti già notati nella *semplicità* assoluta.



CA-

CAPITOLO NONO,

In cui si espone il metodo per conoscere quando nella spiegazione di un fenomeno ricorrer debbasi al principio attivo risedente nella materia.

* * * O * * * O * * * O * *

DEFINIZIONE XLIII.

249. **F**ORZA MECCANICA chiamo quella, che procede da un agente estrinseco materiale, applicata in qualunque modo alla materia.

DEFINIZIONE XLIV.

250. FORZA IMMECCANICA chiamo quella, in cui non può concorrere, e non concorre di fatto forza alcuna meccanica, ma che parte dall'intimo, o sia dalla sostanza della materia.

Sco-

S C O L I O.

251. Per evitare ogni equivoco, siccome ogni forza meccanica attiva dividefi in *pressione*, e in *percoffa*, così dividerò ogni forza immeccanica in *gravità*, ed *attrazione*; onde

DEFINIZIONE XLV.

252. Per GRAVITA' intendo quella forza immeccanica (250.), per cui un corpo lasciato in libertà cade da qualunque altezza verso la superficie Terrestre; o per cui qualunque corpo sostenuto sforzasi di vincer l'ostacolo, e di scender più a basso, col premerlo continuamente.

DEFINIZIONE XLVI.

253. Per ATTRAZIONE intendo ogni altra forza immeccanica diversa dalla gravità (252.), cioè operante non solo per direzioni diverse da quelle, per le quali muovesi un corpo dalla medesima gravità animato, ma ancora con legge differente.

COROLLARIO.

254. *Attrazione* adunque chiamerassi la forza, con cui la calamita, e il ferro muovonsi reciprocamente all'unione; qual'attrazione può chiamarsi *magnetica*. Attrazione dirassi

V

pari-

parimente la forza, con cui stanno le parti di un corpo collegate, quale può chiamarsi d'*aderenza*, e così dell'altre, le quali, come vedrassi sono di diversa intensità relativamente alla diversa natura de' corpi.

S C O L I O I.

255. Se mai alcuno doveva promuovere con ogni maggiore impegno l'attrazione, lo dovevano essere appunto quelli, che hanno usato ogn'immaginabile sforzo per distruggerla totalmente; io voglio dire il Leibnizio co' suoi seguaci; imperciocchè supposto, che le loro Monadi siano gli elementi de' corpi, dovevano necessariamente collocare in esse (tralasciate tante altre proprietà attribuiteli gratuitamente, le quali rendono un tal Sistema intralciato, confuso, e affatto intelligibile, non che verisimile) una forza, che le mantenesse aderenti nel vicendevole combaciamento; altrimenti i corpi non avrebbero mostrato resistenza alcuna al disfacimento, e alla risoluzione ne' loro primi principj, talmente che anche i più compatti ci farebbero di quando in quando per varie cause spariti davanti gli occhj, come far sogliono l'essenze più volatili. Doveva dunque nel lor Sistema esser l'attrazione un carattere il più necessario, anzi l'origine di tutti gli altri; imperciocchè se principali caratteri della materia sono estensione, e solidità, dovevano questi riconoscere la loro esistenza da una previa forza attraente, e collegante le Monadi a segno, di poter queste produrre il gran fenomeno della *materia*. Così se questa è estesa, il detto Autore doveva riconoscere una forza, che teneffe unite le parti inestese

stese per formar l'estensione. Se è coesa, doveva esservi similmente una forza attraente gli Enti semplici, e immateriali a segno di venire a generare col loro ammassamento la coesione. Se è solida, doveva esser prima estesa, e coesa, e perciò supponeva anteriormente attraibili i suoi elementi; ma questi sono i suoi caratteri essenziali; dunque è manifesto l'assunto.

256. Di più, potevano dimostrare molto facilmente *a priori* almeno la forza di aderenza tra corpo e corpo; imperciocchè essendo indispensabile alle Monadi una forza collegatrice inerente ad esse, ed essendo nel loro Sistema i corpi composti di Monadi, questo carattere doveva esser necessariamente inseparabile anche riguardo alle Monadi estreme, che rimanevano scoperte a formarne la superficie; dunque tra corpo e corpo a tutta sostanza, come pure tra superficie e superficie doveva essere assolutamente necessaria una forza inseparabile, ed intima, che li richiamasse all'unione reciproca, e che ve li tenesse stretti secondo quell'energia, che fosse loro toccata in sorte, e ciò perchè restassero i fenomeni naturali effettuati.

257. Quanto ho detto del Leibnizio, dico ancora del Newton, il quale dal supporre la materia organizzata di parti divisibili all'infinito, non doveva mostrar, come fece, alcun dubbio sulla necessità d'una forza intrinseca che ne collegasse le particelle infinitesime. In somma in qualunque altro Sistema di principj corporei già immaginato da i Filosofi bisogna ammettere questa forza, come necessaria a tenere unite le parti costitutive della materia, acciò fosse coesa, e in conseguenza come il fonte di tutte l'altre di lei proprietà.

Imperciochè se le sue particelle fossero composte d'altre infinitesime, e ciò interminabilmente, come le concepì il Newton, posto, che non vi sia una forza, che le colleghi, ne seguirebbe, che esisterebbe la materia divisa, e sciolta all'infinito; il che ripugna (101.).

S C O L I O II.

258. Un altro argomento a favore della mia opinione fugli Atomi presentamisi alla immaginazione. Se gli Atomi fossero composti di particelle divisibili per natura all'infinito, farebbero molto facilmente frangibili, ed eccone la prova. Giacchè il contatto di due Atomi omogenei è quanto, benchè inassegnabile, ed è separabile da una piccola forza per l'esperienza, se s'immaginerà dentro la sostanza d'uno di tali Atomi in qualunque luogo un contatto della medesima estensione, sarà suscettibile anch'esso di separabilità, e di scissura, il che è innegabile, concorrendovi esattamente l'istesse circostanze; ma per separare il contatto di due Atomi omogenei richiedesi, come si è detto, piccola forza, che agisca in un tempuscolo; dunque per dividere in due un Atomo intero basterà parimente una forza altrettanto piccola, che agisca successivamente al più in un tempo assegnabile, e perciò l'Atomo farà frangibile.

Il Cav. Newton poi s'accorda con molti Filosofi sì antichi, che moderni a stabilire, che, se gli Atomi fossero dissolubili, tutta la Natura si troverebbe in confusione, e in tumulto (a), in vece di mantener costantemente il bell'ordine, ond'è

(a) *Optic. Lib. III. Quæst. XXXI. } pag. 325. Edit. Lufan. & Geneva 1740-*

ond'è dotata; dunque se gli Atomi fossero per natura divisibili in infinito, questo disordine sarebbe già da gran tempo accaduto; ma non vi è il minimo contraffegno, nè che sia accaduto, nè che sia per accadere; dunque, anche inerendo a i principj Newtoniani, gli Atomi non solamente non sono per natura divisibili in infinito, ma ripugna anche il supporre, che siano ne' loro componenti corredati d'una forza ad ogni forza in natura insuperabile.

259. Piacemi illustrare l'addotto ragionamento con un fatto molto ovvio. Dasi un urto in un vaso, che sia pieno d'acqua con in fondo poca terra sottilmente polverizzata, si vedranno manifestamente scompigliarsi, e sconvolgersi sopra tutti quanti i suoi componenti: or l'acqua passa per corpo semplicissimo, cioè per un' innumerabil congerie di Atomi omogenei posti al contatto; dunque un urto è capace di sciogliere un numero prodigiosamente esorbitante di contatti, la somma de' quali, giacche sono quanti, benché ciascuno inassegnabile, non si può negare, che non superi quel numero di contatti, con cui una particella, o una, per così dire, piccolissima fetta di Atomo aqueo combacia da una parte col rimanente. Se dunque i Newtoniani vogliono tenere alcuni loro principj, li conviene concedere, che esistano gli Atomi dotati d'un perfetto continuo, e in conseguenza incapaci per natura di divisione, non che divisibili all' infinito; il che viene a confermare ciò, che si è antecedentemente stabilito.

Sco-

S C O L I O III.

260. Ho ritenuto il nome d'*attrazione* (che il Canonico Rossotti (a) forse più acconciamente chiama *genio*, *inclinazione*, *appetenza* &c.), per esser più generalmente ricevuto, quantunque non vi manchino persone, che al sol sentir nominarla si arruffino, e si raccapriccino da capo a piede, come gli Idrofobi alla terribil vista dell'acqua. Alcuni in Francia si servono più tosto del nome di *affinità*, *rapporto*, *convenienza* &c.. Si può veder ciò in M. Macquer (b). Io porrò qui uno squarcio dell'estratto fattone dal Giornalista Francese. (c) „ 1.) Tutte l'esperienze chimiche provano, che „ vi ha tra le differenti sostanze una convenienza, o un'affinità, o un rapporto, per cui elleno si uniscono l'une alle altre. „ 2.) Che quest' affinità è maggiore tra alcune sostanze, che „ tra l' altre, dimodoche quella, che ha maggiore affinità, caccia via quella, che ne ha meno, e forma con l'altra una „ nuova combinazione. 3.) Che quando un corpo ha un „ rapporto eguale con quelli, che formano il primo composto, non li disunisce, ma si congiunge con essi. 4.) Che „ un corpo, che con le sostanze formanti un composto ha „ minore affinità, che esse non hanno fra loro, può disunirle, associandosi ad una di esse, se egli stesso è composto „ di due sostanze, l'una delle quali abbia un' affinità più „ stretta, che non hanno le due, che si vuol disunire. 5.) „ Che i composti, che risultano dalla nuova unione, non han-

(a) *Insegnamenti Fisico-Matematici*;
Antignome Fisico-Matematiche.

(b) *Elémens de Chimie theorique.*

(c) *Jou-r-n. des Sav. Avril 1750. pag. 315. Edit. d'Amstèr-d.*

PARTE PRIMA, CAPITOLO IX. 159

„ hanno più le medesime proprietà de' composti, che sono
„ stati disuniti. 6.) Che tutte le sostanze simili hanno affi-
„ nità fra loro, come l'acqua con l'acqua &c. 7.) Che
„ quantopiù le sostanze sono semplici, più forza hanno le
„ loro affinità, e più difficile è in conseguenza di separar que-
„ ste sostanze. Qualunque per altro sia il nome, che dar
si voglia a quella forza, ciò poco importa, purché si conven-
ga del fatto.

PROPOSIZIONE XL.

*261. Tutti i fenomeni della Materia vengono prodotti
da due cause, cioè da forza meccanica, o immeccanica.*

La forza meccanica (249.) vien generalmente ricono-
sciuta; l'immeccanica (250.) si è abbondantemente dimo-
strata. Or siccome fuor di queste due cause generali non se ne
riconosce altra in natura, è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO I.

*262. Dunque qualunque fenomeno sarà, o meccanico;
o immeccanico, o misto.*

COROLLARIO II.

*263. Quando dunque si dimostrerà, che in un fenomeno la
forza meccanica non vi ha, ne vi può aver luogo, bisognerà
dedurne per conseguenza necessaria, che ve l'abbia la forza
immeccanica; onde con le leggi di questa dovrà il fenomeno
essere sciolto.*

Co-

COROLLARIO III.

264. Che se si troverà, che amendue vi concorrano, e che il Problema perciò sia *misfo* (262.), converrà fare il possibile per separarle, acciò in tal guisa l'effetto, o l'energia di ciascuna a parte riconoscer si possa.

COROLLARIO IV.

265. Posto poi, che sia puramente *immeccanico*, bisogna osservare, se vi concorrano la gravità, e l'attrazione congiuntamente, o se una di loro produca l'effetto, e ciò per riconoscerne separatamente l'azione, e potendo, la sua quantità.

S C O L I O I.

266. I Fautori stessi delle forze immeccaniche disprezzano molto frequentemente l'addotte cautele, pronunziando con troppa franchezza, che quel tal fenomeno, che hanno fra mano, venga prodotto ex. gr. dall'attrazione, ed invitando in tal guisa gl'indagatori della natura a credergli sulla loro parola. Essi in ciò fare danno in un altro estremo simile a quello de' Meccanici, che pretendono, senz'averlo prima dimostrato, che tutti i fenomeni a forza d'impulso possano esser convincentemente spiegati; quindi è che i medesimi partitanti favorevoli alle forze immeccaniche, vengono con le loro ipotetiche supposizioni a screditare questo ca-
rat.

rattere importantissimo della materia. E' dunque necessario aver sempre in vista il Corollario secondo, per non essere accusati di visionarj.

I Filosofi dividono tutte le produzioni in animali, in vegetabili, e in minerali. Secondo tal divisione tutte le sostanze, che non sono nè animali, nè vegetabili, debbono esser necessariamente riposte tra i minerali. Non altrimenti un fenomeno; se non è originato dall' impulso, dev' essere assolutamente prodotto dalla gravità, o dall' attrazione; ma avvertasi, che quando si vuole escludere il meccanismo per sottruirli l'immeccanismo, non si deve far ciò sulla riflessione, che una causa meccanica sia a noi impercettibile, bisogna provare, che il meccanismo sia o impossibile, o incompatibile col fenomeno, che si ha fra mano, ed in questo senso va preso il detto Corollario secondo (263.).

267. Quando però il detto metodo assegnato nella soluzione de' fenomeni si va mettendo in pratica, è necessario star cauti, per non esser ingannati da qualche impulso, il quale ci seduca sotto le apparenze d' attrazione, e viceversa. Il gran Boerhaave ci consiglia a star sull' avviso, per ciò che riguarda le soluzioni de' corpi, affinchè non confondiamo l' effetto meccanico con l'immeccanico. *Offa, (egli dice) annosi Bovis cocta in aqua, vase aperto, vix mutantur diuturna ebullitione; eadem in machina coctrice Boyleana, vel Papiniana, pauco tempore mollescent, solvuntur. Discrimen, quod aquae partes, ardentissime compressae ad os, agitentur supra illud summo cum astritu (a).* Una goccia d' acqua incava col continuo stillicidio una pietra. Si veggono i massi ne' monti incanalati d' una

X

no-

(a) *Elem. Chem. T. I. De Menstr. | p. 356. Col. 2. Edit. Ven. An. 1737.*

161 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

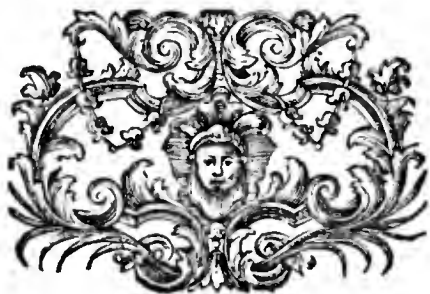
notabil fossa in quel luogo, per cui rovina l'acqua da gran tempo. Errerebbe in tal caso chi ne rifondesse la causa nell'attrazione. Bisogna poi dall'altro canto mantenersi bene in guardia per non deferir troppo al meccanismo. *Peccat proinde*, (dice il medesimo Boerhaave), *quisquis viriutis Mechanicæ plus tribuit, quem Natura Auctor illi concessit: limites habet iustos, intra quos qui cautus reminet, prudens iisdem, quousque datur, nec ultra, utetur ad interpretanda Chémica. En hæc expressa mihi amore veri sententia super his*. Sospendasi dunque il giudizio, e quando veggasi in un fenomeno, che vi sono de' fatti inconciliabili totalmente con le regole, e con le leggi stabilite nel meccanismo, si decidano sicuramente immeccanici.

S C O L I O II.

268. Con tali premesse (262. e segg.), si può stabilire la divisione generale della Fisica in Meccanica, Immeccanica, e Mista, a titolo di contemplare i fenomeni separatamente, per poi poterli comprendere, e spiegare congiuntamente. Su tal fondamento io ho preso ad esaminare le forze immeccaniche semplici, cioè da se sole senza combinazione d'altre forze meccaniche, vale a dire, d'impulso, di strofinamento, o di resistenza, tantopiù, che questa importantissima parte della Fisica, la quale si può dire tuttavia nascente, raggirasi sopra principj tali, che, come ho già dimostrato (245.), possono essere i principj del meccanismo. In fatti i distaccamenti delle rupi, e de' corpi tutti dal suo luogo; il corso dell'acque, le germinazioni delle piante; l'evaporazioni de' corpi,
e le

e le ricadute loro in pioggia, neve, e grandine; l'accensioni tanto ne' luoghi alla superficie Terrestre, e sotterranea, che nell'aria; i terremoti, i venti, e tant'altre circostanze gran mutazioni producono, e produrrebbero sul nostro Globo Teraqueo, quand'anche non vi fossero Abitatori. Che se sul medesimo piede si formerà una Fisica Meccanica, nel mettere poi insieme la Fisica Mista, che è la più difficile, perchè più composta, si potrà più agevolmente conoscere, quali cause concorrano all'effettuazione d'un fenomeno complicato, considerando, e computando le forze meccaniche, ed immeccaniche separatamente, e poi facendone l'aggregato, o il desalco, per confrontarle con la loro azione combinata, e per venire in tal guisa alla vera, e stabile spiegazione di qualche proposto fenomeno.

Fine della Parte Prima.



Verus est, omniumque communis sententia; si quis ea quae magna sunt, recte transigere velit, in parvis quibusdam prius illa facilioribusque, quam in maximis considerare debere.

PLATO in Sophista paulo post init.

ELEMENTI

D I

FISICA IMMECCANICA.

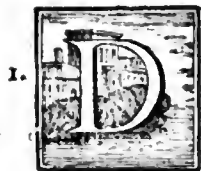
PARTE SECONDA.

CAPITOLO PRIMO

Delle Tangenti.

DEFINIZIONI.

I.



1. DIAMETRO d'una Curva è quello, che sega per mezzo le parallele confinanti da una parte, e dall'altra col di lei perimetro. Così AB (*Fig. 5.*) è il diametro della Curva MAM, perchè sega per mezzo le parallele MM. Dicesi specialmente *Asse*, quando le taglia ad angoli retti.

II.

2. VERTICE della Curva chiamasi il punto A, da cui vien tirato il Diametro, o l'Asse.

ORDI-

III.

3. ORDINATE sono le linee equidistanti MM , che confinano da ambe le parti d'una Curva MAM , e che son tagliate per mezzo dal diametro, o dall'asse AB . Le loro metà diconsi semiordinate, benché fogliano ordinariamente chiamarsi anch'esse *ordinate*, e *applicare*.

IV.

4. ASCISSA dicesi quella porzione AP di diametro, o di asse, che viene ad esser compresa tra 'l vertice, e l'ordinata, o la semiordinata, ovvero tra un punto fisso, e l'ordinata.

V.

5. Se all'applicata PM (*Fig. 6.*) d'una Curva qualunque AM tirisi un'altra applicata infinitamente prossima pm , e dal punto M conducasì la Mo parallela all'asse, o diametro AP , differirà la prima dalla seconda applicata d'un impercettibile quantità mo , quale dirassi *inaffegabile*, o *infinitesima del primo grado*.

COROLLARIO I.

6. Dunque anche la Pp , e la Mm , che non differisce sensibilmente da una linea retta, saranno inaffegnabili, o infinitefime del primo grado.

Co-

COROLLARIO II.

7. Quindi vedesi, che richiedendosi un numero esorbitante delle mo per formare la pm , questa sarà sensibilmente sempre l'istessa, aggiungasele, o togasele la detta infinitesima mo ; il medesimo dicasi della AP rispetto alla Pp .

VI.

8. Se un'infinitesima mo suppongasi divisa in maniera, che la parte recisa sia terza proporzionale dopo le po, om ; ovvero quarta proporzionale dopo le po, om, oM ; questa si chiamerà *inassegnabile*, o *infinitesima del secondo grado*.

COROLLARIO I.

9. Dunque tanto il quadrato della mo , e della Pp , quanto il loro rettangolo $Pp \times mo$, faranno un'inassegnabile del secondo grado; il che ravvisasi facilmente, facendo la quantità assegnabile PM , ovvero $po = 1$.

COROLLARIO II.

10. Quindi conoscesi, quali sono le inassegnabili, o infinitesime del terzo, e del quarto grado, e in conseguenza de' gradi superiori.

Co-

COROLLARIO III.

11. Giacche la giunta, o il defalco della *om*, rispetto alla *pm*, o della *Pp* rispetto alla *AP*, non viene a produrre alterazione veruna conoscibile (7.); vale a dire, se la giunta, o il defalco d'un'infinitesima del primo grado non altera una quantità assegnabile, anche la giunta, o il defalco d'una, o più infinitesime del secondo grado non farà capace d'alterare la quantità d'un'infinitesima del primo, e perciò incomparabilmente meno potrà alterare una quantità assegnabile; il che dimostra, che quando si voglia tralasciare una, o più infinitesime del secondo grado, o de' gradi superiori, la quale faccia somma, o differenza con una infinitesima del primo grado, si potrà fare senza il minimo sospetto d'error sensibile, particolarmente se tal somma, o differenza riguardi una quantità assegnabile.

S C O L I O.

12. Suppongasi per maggior evidenza, che sia stata presa con tutta l'esattezza immaginabile l'altezza d'una montagna, e che dopo tal operazione il vento abbia trasportato sul punto più sublime di essa un minutissimo granello d'arena; niuno, che faccia uso di ragione, pretenderà, che si debba ripigliar da capo per tal motivo la misura, perchè quando si ripigliasse incessantemente, non si potrebbe assegnare con le misure usuali l'altezza d'una particella appena visibile. Similmente chi volesse sommare le moli d'un migliajo
di

di montagne, e disprezzasse in ciò fare un migliajo, o due di piccolissimi granelli d'arena, tal difetto non sarebbe certamente reperibile dal più accorto, ed esatto Geometra. Immaginiamoci adesso, che come stà la montagna a quel granellino d'arena, così stia questo ad una sua porzione, sfido il più scrupoloso a farne caso, vedendosi manifestamente, che impercettibile è alla mente istessa una tal misura, non che eseguibile cogl'istrumenti a tal fine destinati, ancor quando si annichili di tali porzioni quel numero, che si vuole. Si adattino adesso i casi proposti alle quantità infinitesime, inassegnabili, tanto del primo, quanto de' gradi superiori, e refterà ognuno convinto, che sono senza il minimo scrupolo disprezzabili, particolarmente le inassegnabili de' gradi superiori rispetto alle quantità assegnabili. Queste quantità poi, come insegneranno gli Esempj, sono un ripiego, e uno stratagemma geometrico; per far tra esse comparire le quantità assegnabili, che si ricercano. Ma queste verità faranno a suo luogo con esattezza geometrica dimostrate.

COROLLARIO IV.

13. Ciò, che si è detto d'una linea inassegnabile, o elementare riguardo a una linea assegnabile, può applicarsi ad una superficie, o ad un solido inassegnabile, o elementare rispettivamente ad una superficie, o ad un solido assegnabile.

VII.

14. EQUAZIONE di una Curva dicesi il rapporto, che ha costantemente l'ascissa all'ordinata della medesima, qual

Y

rap-

170 **ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA**
 rapporto costituisce il carattere, o la natura particolare di
 essa Curva.

VIII.

15. **CURVA ALGEBRAICA, o ALGEBRICA** dicefi quella,
 la di cui equazione contiene soltanto linee rette assegnabili;
 ovvero le di cui ascisse hanno all'ordinate un rapporto
 esprimibile per mezzo d'assegnabili linee rette.

IX.

16. **CURVA TRASCENDENTE, o MECCANICA** è quella,
 in cui il rapporto tra l'ordinata, e l'ascissa non è esprimibile
 in linee rette assegnabili.

PROPOSIZIONE I.

17. *Tirar la Tangente a qualunque Curva Algebraica.*

Sia *AM* (*Fig. 6.*) la data Curva, la di cui ascissa *AP*,
 e l'applicata *PM*; tirisi a quella l'applicata infinitamente prof-
 fima *pm*, e dal punto *M* abbassata la perpendicolare *Mo*, suppon-
 gafi condotta dal punto *M* la Tangente *MT*. Per esser simili
 i Triangoli *Mom*, *TPM*, si avrà l'analogia *mo:Mo::PM:*
PT; trovato dunque il rapporto delle *mo*, *oM*, ovvero del-
 le *mo*, *Pp*, si verrà in cognizione della sottrattante *PT*, di-
 modoche condotta la *TM*, quella sarà la tangente desidera-
 ta. Per trovar tal rapporto, riflettasi, che essendo anche *Ap*
 un' ascissa, e la *pm* la sua applicata corrispondente, anche
 nelle coordinate *AP + Pp*, *PM + om* deve avverarsi l'equa-
 zio-

PARTE SECONDA, CAPITOLO I. 171

zione alla medesima Curva AM. Espressa dunque con queste tal equazione, che dirassi secondaria, e da essa descalcata l'equazione primaria indicata dalle sole coordinate AP, PM, indi cancellate le quantità infinitesime del secondo grado come superflue (11. 12.), resteranno nell'equazione le quantità assegnabili miste all' inassegnabili Pp , om ; sicche risolta tal equazione in analogia, ovvero per essere $PT:PM::Pp:om$, sostituiti in essa equazione questi equivalenti, si otterrà in termini tutti finiti, come apparirà meglio dagli Esempj seguenti, il ricercato rapporto; il che &c..

E S E M P I O I.

18. Sia AM (Fig.6.) una Parabola Apolloniana, la di cui equazione secondaria (fattone per compendio il parametro = 1.) è $AP + Pp = \overline{PM}^2 + 2 PM \times om + \overline{om}^2$; tolga si da questa l'equazione primaria $AP = \overline{PM}^2$, e cancellisi l'inassegnabile del secondo grado \overline{om}^2 (qual abolizione si supporrà sempre fatta in avvenire), resterà $Pp = 2 PM \times om$; onde sostituiti gli equivalenti, si avrà $PT = 2 \overline{PM}^2 = 2 AP$; e però nella Parabola Apolloniana la sottangente sarà doppia dell'ascissa.

E S E M P I O II.

19. Se la Curva AM sarà una Parabola cubica, la di cui equazione prima è $AP = \overline{MP}^3$, la seconda equazione,
Y 2 tra-

172 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 tralasciati gl' inassegnabili del secondo, e terzo grado, farà

$AP + Pp = \overline{PM}^3 + 3\overline{PM}^2 \times om$, da cui tolta la prima, si
 avrà $Pp = 3\overline{PM}^2 \times om$, e quindi $PT = 3\overline{PM}^3 = 3AP$;
 onde nella presente Parabola cubica la sottangente è tripla
 dell' ascissa.

E S E M P I O III.

20. Se AM farà una Parabola, la di cui equazione

$AP = \overline{PM}^{\frac{2}{3}}$, ovvero $\overline{AP}^3 = \overline{PM}^2$, la seconda equazione farà
 $\overline{AP}^3 + 3\overline{AP}^2 \times Pp = \overline{PM}^2 + 2\overline{PM} \times mo$; onde $3\overline{AP}^2 \times Pp =$
 $2\overline{PM} \times mo$; e quindi $PT = \frac{2\overline{PM}^2}{3\overline{AP}^3} = \frac{2}{3}AP$.

E S E M P I O IV.

21. Se AM farà una Parabola, la di cui equazione

$AP = \overline{PM}^{\frac{3}{2}}$, ovvero $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^3$, l' equazione seconda farà
 $\overline{AP}^2 + 2AP \times Pp = \overline{PM}^3 + 3\overline{PM}^2 \times om$; onde $2AP \times Pp$
 $= 3\overline{PM}^2 \times om$; e quindi $PT = \frac{3\overline{PM}^2}{2\overline{AP}^2} = \frac{3}{2}AP$.

Sco-

S C O L I O.

22. Proseguendo in tal guisa le ricerche per trovare la sottangente d'altre Parabole di grado superiore, si vedrà ben presto, che mantengono costantemente nella loro sottangente questa legge, cioè che l'ascissa stà alla medesima sottangente, come l'unità all'esponente dell'applicata diviso per l'esponente dell'ascissa; onde se l'equazione alle innumerabili Parabole, o Paraboloidi d'ogni specie è compresa in questa

formula generale $\overline{AP}^m = \overline{PM}^n$, stà l'ascissa alla sottangente, come $1 : \frac{n}{m}$, e perciò sarà generalmente $PT = \frac{n}{m} \times AP$. E qui

offerirsi, che quando la sottangente è minore dell'ascissa, la Parabola, di qualunque rango ella siasi, deve considerarsi rivolta con la convessità all'asse, il che succede quando m è maggiore di n ; così quando alla parte esteriore della Parabola AM (Fig. 6.) la AQ fa figura d'ascissa, e la QM di applicata, la sottangente PQ è sempre minore dell'ascissa AQ, come è manifesto; il che serva giudiziosamente di regola per altri casi similili, avvertendo, che la regola può esser fallace, quando la Curva avesse ciò, che chiamasi *flesso contrario*. Che se farà $m=2, n=4$, la sottangente sarà sempre doppia dell'ascissa, ed in fatti tant'è l'equazio-

ne $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^4$, quanto $AP = \overline{PM}^2$.

ESEM-

E S E M P I O V.

23. Sia la Curva Mm (Fig. 7.) un' Iperbole Apolloniana tra gli Asintoti AT , AV , la di cui equazione è $x = AP \times PM$, ovvero $AP = \frac{x}{PM}$, la sua seconda equazio-

ne farà $AP + Pp = \frac{x}{PM - Mo}$; perche, come è visibile, l'or-

dinate scemano della quantità Mo , mentre l'ascisse crescono della quantità Pp ; onde tolta la prima equazione, resterà

$$Pp = -\frac{x}{Mo}, \text{ e quindi } PT = -\frac{x}{PM} = -AP; \text{ sicche presa la}$$

$PT = PA$, ma dalla parte opposta all' origine dell' ascissa a causa del segno contrario, come nella figura, farà la sottangente richiesta.

E S E M P I O VI.

24. Sia l' equazione all' Iperbole cubica $AP = \frac{x}{MP}$, la

sua seconda equazione farà $AP + Pp = \frac{x}{PM} - 2 PM \times Mo$; onde

$$Pp = -\frac{x}{2 PM \times Mo}; \text{ quindi } PT = -\frac{x}{2 PM^2} = -2 AP; \text{ cioè}$$

nell' Iperbole cubica la sottangente presa dalla parte contraria all' origine dell' ascissa, a causa del segno negativo, eguaglia il doppio dell' ascissa.

ESEM-

E S E M P I O VII.

25. Se farà l'equazione $\overline{AP}^2 = \frac{1}{PM}$, che è alla parte opposta dell' Iperbole cubica, si avrà per seconda equazione $\overline{AP}^2 - 2AP \times Pp = \frac{1}{PM + Mo}$; onde $-2AP \times Pp = \frac{1}{Mo}$; quindi $PT = -\frac{1}{2}AP$.

S C O L I O:

26. Andando avanti, e facendo nuove ricerche, si conoscerà dopo non molto esame, che nelle Iperboli tra gli Asintoti le sottragenti prese dalla parte contraria mantengono un ordine costante, cioè sono tanto moltiplici dell'ascissa, quanto indica l'esponente dell'applicata, e ciò quando le potestà dell'applicate sono reciproche all'ascisse; ma quando al rovescio le potestà dell'ascisse sono reciproche all'applicate, allora le sottragenti sono tanto sumoltiplici dell'ascisse, quanto indica l'esponente dell'ascisse medesime; onde supposto, che l'equazione generale all' Iperboli di qualun-

que specie sia $\overline{AP}^m = \overline{PM}^{-n}$, ovvero $AP = \overline{PM}^{-\frac{n}{m}}$, si troverà, che la formula per le Tangenti di tutte l' Iperboli in infinito tanto da una parte, che dall' altra, è generalmente

$$Pi =$$

$PT = -\frac{n}{m} \times AP$, cioè l'intercetta delle Parabole (22.), ma col segno negativo.

E S E M P I O VIII.

27. N. 1. Sia l'equazione $\overline{PM}^2 = 1 \pm \overline{AP}^2$, che col segno $+$ è all'Iperbole equilatera, e col segno $-$ è al Cerchio, computate l'ascisse dal centro; la sua seconda equazione sarà

$\overline{PM}^2 \pm 2 PM \times mo = 1 \pm \overline{AP}^2 \pm 2 AP \times Pp$; onde $\pm 2 PM \times mo = \pm 2 AP \times Pp$; quindi $AP:PM::PM:PT$; il che dimostra, che tanto nel cerchio, quanto nell'Iperbole equilatera la fottangente è terza proporzionale dopo l'ascissa, e la semiordinata. E qui pure s'avverta, che al crescere dell'ascisse nel Cerchio scemano l'ordinate.

N. 2. Ovvero sia l'equazione $\overline{PM}^2 = AP \pm \overline{AP}^2$, che col segno affermativo è all'Iperbole equilatera, e col negativo al cerchio, computate l'ascisse dal vertice della Curva; fa-

rà la seconda equazione $\overline{PM}^2 \pm 2 PM \times mo = AP \pm Pp$
 $\pm 2 AP \times Pp \pm \overline{AP}^2$; onde $\pm 2 PM \times mo = Pp \pm 2 AP \times Pp$;

in conseguenza $\frac{\pm \overline{PM}^2}{1 \pm \overline{AP}^2} = \frac{AP \pm \overline{AP}^2}{1 \pm AP} = PT$,

ESEM-

E S E M P I O IX.

28. Sia l'equazione all'Ellisse congiuntamente, e all'Ipèrbole $\overline{PM}^2 = Q \times AP \pm Q \times \overline{AP}^2$, in cui il maggior asse $= 1$, ed il parametro $= Q$, ed ove il segno negativo appartiene all'Ellisse; farà la seconda equazione $\overline{PM}^2 + 2 PM \times mo = Q \times AP + Q \times Pp \pm Q \times \overline{AP}^2 \pm Q \times 2 AP \times Pp$; onde $2 PM \times mo = Q \times Pp \pm Q \times 2 AP \times Pp$; quindi

$$\frac{2 \overline{PM}^2}{Q \times (1 \pm 2AP)} = \frac{2AP \pm 2\overline{AP}^2}{1 \pm 2AP} = PT.$$

E S E M P I O X.

29. Sia l'equazione $PM \times AP = PN \times AB$ (Fig. 8.) qual'equazione è alla Curva detta *Versiera* dal celebre Padre Grandi ^(a); facendo per brevità il diametro AB del semicerchio ANB $= 1$, la seconda equazione farà $(PM - Mo) \times (AP + Pp) = PN + sn$; ma $sn = Pp \times \left(\frac{1 - 2AP}{2PN}\right)$ (27. N. 2.); dunque $PM \times AP + PM \times Pp - AP \times Mo = PN + Pp \times \left(\frac{1 - 2AP}{2PN}\right)$; onde $PM \times Pp - AP \times Mo = Pp \times \left(\frac{1 - 2AP}{2PN}\right)$

Z

ovve-

(a) Note al Trattato del Galileo del | del Galileo T. III. in Firenze 1712.
moto naturale accelerato. V. Opere | pag. 393.

ovvero $-AP \times Mo = Pp \times \left(\frac{1 - 2AP}{2PN} \right) - Pp \times PM$; il

che dà l'analogia $-Mo : Pp :: \frac{1 - 2AP}{2PN} - \frac{PN}{AP} : AP :: \frac{-1}{2PN} :$

$$\begin{aligned} AP :: \frac{PN}{AP} : PT &= -(2AP - 2\overline{AP}^2) = -\left(\frac{2AB \times AP - 2\overline{AP}^2}{AB} \right) \\ &= -\frac{AP \times PB}{AC}. \end{aligned}$$

S C O L I O I.

30. Avvertasi, (1. che per esser la sottangente PT or minore, or eguale, or maggiore della PB, ne viene, che la Versiera in questione ora rivolge all' asse la convessità, ed ora la concavità; e però questa Curva deve avere il flesso contrario, o regresso; (2. che si è presa Mo col segno negativo, perchè la PM decresce al crescere della AP; (3. che per il segno negativo la sottangente va presa dalla parte opposta all'origine della ascissa, come mostra la figura.

S C O L I O II.

31. Senza che io l'avvertisca, conoscesi chiaramente, che questo metodo per trovar le Tangenti è applicabile anche alle Curve trascendenti, o meccaniche (16.) ogni volta che ne venga assegnata l'equazione. Ma vi sono molti casi tanto nelle Curve algebriche, quanto nelle trascendenti, ne quali si può senza le previe equazioni ripescare con la sola analogia

logia il valore della sottangente. Queste due circostanze si metteranno in chiaro negli Esempj seguenti.

E S E M P I O XI.

32. Sia AMC (Fig. 9.) l'Elice, o Spirale d'Archimede, il di cui Cerchio genitore APD, l'ascissa AP, e l'applicata CM; dal centro C tirisi la Cp formante con la CP un angolo infinitamente piccolo PCp, e cogli intervalli CM, Co descrivanfi i due archi infinitesimi MN, mo. Per essere Mo il lato, che deve confonderfi con la tangente, ne verrà, che starà NM: Mo, come la sottangente alla tangente; ma la MN è perpendicolare alla CP; dunque abbassata la CT perpendicolare in C alla CP, supponasi condotta la tangente TM. Siccome fatta la periferia circolare = R, l'equazione alla Spirale in questione è $AC \times AP = R \times CM$, la seconda equazione sarà $AC \times AP + AC \times Pp = R \times CM - R \times Mm$; onde $AC \times Pp = -R \times Mm$; che darà $Mm: Pp::AC:-R$, e perciò $\frac{Pp}{Mm} = -\frac{R}{AC}$.

In oltre abbiamo $CP:CM::Pp:MN = \frac{Pp \times CM}{CP}$, come ancora $oN:NM::MC:CT$; ovvero $Mm: \frac{Pp \times CM}{CP}$

$$::MC:CT = \frac{Pp \times CM}{Mm \times CP} = -\frac{R \times CM}{AC \times CP} = -\frac{AP \times CM}{CP};$$

sicche dal centro C con l'intervallo CM descritto l'arco circolare BM, questo sarà eguale alla sottangente CT. Dipen-

180 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 de dunque la determinazione della sottangente nella spirale
 ordinaria , o quadratica dalla quadratura del Cerchio .

C O R O L L A R I O .

33. Nell' Elice ordinaria , o Archimedeana è manifesto,
 che la sottangente CT stà come il quadrato del raggio CM,
 e ciò per esser costanti le R, AC, ovvero CP.

E S E M P I O XII.

34. Sia AM una spirale cubica (*Fig. 9.*), la di cui e-
 quazione $AC \times \overline{AP}^2 = R^3 \times CM$; farà la sua seconda e-
 quazione $AC \times \overline{AP}^2 + AC \times 2 AP \times Pp = R^3 \times CM -$
 $R^3 \times Mm$; onde $2 AC \times AP \times Pp = -R^3 \times Mm$; quindi
 $\frac{Pp}{Mm} = -\frac{R^3}{2 AC \times AP}$; ma nell' Esempio antecedente si è dimo-
 strato $CT = \frac{Pr \times \overline{CM}^2}{Mm \times CP}$; dunque in questo Esempio farà $CT =$
 $\frac{-R^3 \times \overline{CM}^2}{2 AC \times AP \times CP} = -\frac{1}{2} \frac{AP \times CM}{CP}.$

Sco-

S C O L I O.

35. Se la AM (Fig. 9.) fosse una spirale, la di cui equazione $\overline{AC}^3 \times \overline{AP} = R^3 \times \overline{CM}^3$, si troverebbe essere la sua sottangente $CT = -\frac{1}{3} \frac{\overline{AP} \times \overline{CM}}{\overline{CP}}$. Se la detta spirale avesse l'equazione $\overline{AC}^2 \times \overline{AP} = R^3 \times \overline{CM}^2$, si troverebbe la $CT = -\frac{2}{3} \frac{\overline{AP} \times \overline{CM}}{\overline{CP}}$; dal che ricavasi, come ancora da ulteriori operazioni sopra altre equazioni, che le sottangenti di tutte le spirali all'infinito hanno sempre l'espressione $-\frac{\overline{AP} \times \overline{CM}}{\overline{PC}}$ moltiplicata nell'esponente dell'ordinata CM, diviso per l'esponente dell'ascissa AP; detto dunque n il primo, m il secondo esponente, l'equazione generale per l'infinita spirali sarà $\overline{AC}^n \times \overline{AP}^m = R^3 \times \overline{CM}^n$; e l'espressione generale per le loro infinite sottangenti sarà $-\frac{n}{m} \frac{\overline{AP} \times \overline{CM}}{\overline{CP}} = -\frac{n}{m} \overline{BM}$.

COROLLARIO.

36. Quindi essendo costanti le R, AC, la AP sarà proporzionale alla $\overline{CM}^{\frac{n}{m}}$, e però le sottangenti nell'Elici, o spirali staranno generalmente come $\overline{CM}^{\frac{n+m}{m}}$.

ESEM.

E S E M P I O XIII.

37. Sia intorno all'asse AP (*Fig. 10.*) qualunque Curva AQ, di cui sia nota la Tangente QB, e la di cui applicata QP si prolunghi in M talmente, che sia $PM = AQ$, si può trovare speditamente la tangente della natane Curva AM; imperciocchè tirata l'infinitamente prossima qpm , ed abbassate le perpendicolari Qr, Mo , facciasi la solita analogia $mo : oM$, ovvero $Qq : Qr :: MP : PT$; ma $Qq : Qr :: QB : BP$; dunque $QB : BP :: MP : PT$.

COROLLARIO I.

38. Sicchè se la Curva AQ fosse un Cerchio, al di cui centro C concorressero le AC, QC; per essere $QB : BP :: CQ : QP$, la sotttangente PT farà terza proporzionale dopo il raggio del Cerchio genitore, la sua applicata, e la corrispondente periferia, cioè $PT = \frac{QP \times Arc. AQ}{QC}$; ovvero farà proporzionale al prodotto dell'applicata nella corrispondente periferia circolare; e questa PT è la sotttangente d'un'ungula cilindrica appianata, di cui dovraffi parlare in appresso, qual sotttangente dipende, come è visibile, dalla quadratura del Cerchio.

COROLLARIO II.

39. Che se la PM farà eguale alla somma delle due Curve AQ, AN intorno al medesimo asse AP, che abbiano la medesi-

PARTE SECONDA, CAPITOLO I. 183

definita origine in A, e delle quali siano note le tangenti QB, ND, allora sarà $mo = Qq + Nn$, come è evidente; onde si potrà trovar facilmente il rapporto delle mo, oM ; imperciocchè essendovi le due analogie,

$$qQ:Qr::QB:BP$$

$nN:Ns::ND:DP$, e per esser $Qr = Ns$, se ne dedurrà

$$nN + qQ:Qr::ND \times BP + QB \times DP:DP \times BP::MP:PT.$$

Un simil ripiego può prenderfi quando le Curve generatrici sono più di due.

COROLLARIO III.

40. Se poi la PM fosse eguale alla differenza delle due Curve AQ, AN, è chiaro, che sarebbe $mo = Nn - Qq$; onde $mo:oM$, cioè $Nn - Qq:Qr::ND \times BP - DP \times QB:DP \times BP::MP:PT$. Così procedasi quando le Curve generatrici fossero più di due.

ESEMPIO XIV.

41. N. I. Intorno all'asse AQ (Fig. 11.) sia una Curva qualunque AP, di cui sia nota la tangente FP, e la di cui applicata QP si estenda in M in maniera, che sia sempre la PM eguale al perimetro PA, si domanda la tangente della nuova Curva AM.

Supposte QPM, qpm , infinitamente prossime, e da' punti P, M abbassate l'eguali perpendicolari P_s, M_r , e supposta al solito tirata al punto M la tangente ETM, che incontri in T

in T la tangente FP condotta al punto P della Curva AP, e in E la sottrangente QF, tirisi dal punto M la Mo parallela alla tangente TP, la quale sarà parallela, ed eguale alla Pp, per esser questa la continuazione della tangente TP. Si avrà per tanto l'analogia $mo: oM::MP:PT$; ed è l'arco $AP=PM$, e perciò la seconda equazione è $AP+Pp=PM+mo$, che dà $Pp=mo$; dunque ancora $PM=PT$; onde presa nella tangente FP la $PT=PM$, e congiunta TM, sarà tirata la tangente, qual' esecuzione dipende dalla rettificazione della Curva AP, a cui si eguaglia.

In altra maniera,

N. 2. Per esser $Mo=Pp$, $Mr=Ps$, e gli angoli in r, s retti, il triangolo Mor sarà eguale, e simile al triangolo Pps; onde $or=ps$; in oltre $Mo=mo$ perche amendue eguagliano Pp. Posto ciò, in due maniere sciogliesi il Problema; 1.) perche essendo $mo=oM$, sarà ancora per la similitudine de' triangoli $MP=PT$; 2.) perche essendo $mr=Pp+ps$, sarà $mr:rM::Pp+ps:Ps::MQ:QE$; ma $Pp+ps:Ps::FP+PQ:FQ$; dunque $QE=\frac{MQ \times QF}{FP+PQ}$.

COROLLARIO I.

42. Se la Curva AP sarà un Cerchio, la Curva AM sarà una Cicloide, in cui $QM=QP+PA$, ed allora la tangente ME sarà, come avvertì fino il celebre Torricelli, parallela alla corda corrispondente AP del cerchio genitore; imperciocche congiunta al centro C la PC, si avrà $FP+PQ:FQ::$

$FQ::PC+CQ:PQ$; ma $PC+CQ:PQ::PQ:QA$; dunque $MQ:QE::PQ:QA$.

S C O L I O.

43. Ciò si dimostra anche in questa maniera. Tirata al punto A la tangente AI, che incontri in I la tangente PF; per essere $AI=IP$, sarà l'angolo IAP eguale all'angolo IPA, ed è l'angolo IAP eguale all'angolo APQ; dunque gli angoli IPA, APQ sono eguali. In oltre per esser $PM=PT$, anche gli angoli in M, T saranno eguali, onde l'angolo TPQ esteriore eguaglierà il doppio dell'angolo interiore, ed opposto PMT, e perciò essendo l'angolo QPA eguale all'angolo QMT, la AP dovrà esser parallela alla MT; il che dimostra, che la Cicloide taglia la base ad angolo retto, giacche ivi la tangente deve esser parallela al diametro del Cerchio genitore.

COROLLARIO II.

44. Se la PM avrà al Perimetro PA un rapporto qualunque, si troverà nel medesimo modo la tangente PT; sicche se l'equazione fosse $\frac{a}{b} \times MP=PA$, sarà la tangente $PT=\frac{a}{b} \times PM$ (prese le a, b per due quantità); posto dunque, che la AP fosse un Cerchio, la Curva AM sarebbe una Cicloide; cioè allungata, allorché $b>a$; scorciata, allorché $b<a$; giusta, se $b=a$.

Aa

Co

COROLLARIO III.

45. Che se l'applicata QM farà eguale alle due applicate QP, QV, e ai due archi AP, AV di due curve intorno al medesimo asse AQ, che abbiano l'istesso vertice in A, e di cui sian note le tangenti PF, VG, allora farà $rm = Pp + ps + Vu + ur$; onde avremo $mr : rM :: Pp + ps + Vu + ur : Ps$. Per trovare questi rapporti in termini assegnabili, facciasi

$$Vu + ur : Vr :: VG + VQ : QG$$

$$Pp + ps : Ps :: FP + PQ : FQ;$$

$$\text{onde } Ps \times Vu + Ps \times ur + Pp \times Vr + ps \times Vr : Ps \times Vr :: \\ FQ \times VG + FQ \times VQ + FP \times QG + PQ \times QG : \\ QG \times FQ;$$

cioè per essere $Ps = Vr$, si avrà finalmente

$$Vu + ur + Pp + ps : Ps :: FQ \times VG + FQ \times VQ + FP \\ \times QG + PQ \times QG : QG \times FQ;$$

il che serve di regola quando le Curve generatrici fossero più di due.

COROLLARIO IV.

46. Ma se al contrario farà la QM (Fig. 12.) eguale alla differenza del perimetro AP, e della corrispondente applicata PQ, allora farà $rm = Pp - ps$; onde per trovar la tangente alla detta Curva AM, si avrà $rm : rM :: Pp - ps : Ps :: PF - PQ : QF :: MQ : QE$; dimodochè se la Curva AP
sia

PARTE SECONDA, CAPITOLO II. 187

fia un Cerchio, condotta al centro C la PC, si avrà PF
 $-PQ:QF::PC-QC:PQ::AQ:PQ$; onde $AQ:QP::MQ:$
 $QE = \frac{PQ \times MQ}{AQ}$.

COROLLARIO V.

47. Se poi $QM = AP + AV - QP - QV$, allora avremo $rm = Pp - ps + Vu - ur$; onde con un computo simile all' antecedente (45.) si troverà $FQ \times VG - FQ \times VQ + FP \times QG - PQ \times QG:QG \times FQ::MQ:QE$.

ESEMPIO XV.

48. Sia una Curva qualunque ANn (Fig. 13.), a cui fappiasi tirar la tangente, e da essa nasca un' altra Curva AM con questa legge, che le sue applicate PM, pm prese sulle applicate PN, pn della prima Curva prolungate, eguagliino i rami corrispondenti AN, An condotti dal vertice A al perimetro della detta prima Curva ne' punti N, n . Per trovar la tangente MT della seconda curva AM , suppongansi MPN, mpn infinitamente prossime, e da' punti M, P, N si abbassino le perpendicolari Mn, Pp, Ns , indi dal punto A alzata sulla An la perpendicolare AV , che vada a ferire in V la tangente NV , e dal punto V condotta sulla mn la VB parallela all' asse AP , descrivasi dal centro A con l' intervallo AN l' archetto Nr ; farà $rn = mo$; $Ns = Mo$; onde trovata la relazione tra rn, Ns , si farà trovata ancor quella tra mo, Mo , e in conseguenza si avrà il rapporto tra l' applicata PM , e la sottangente PT .

A a 2

Essen-

188 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

Essendo pertanto simili i triangoli nAV , nrN ; nVB , nNr ,
 si avrà $nr:rN::nA:AV$
 $rN:Nn::AV:VN$
 $Nn:Ns::VN:VB$;

dal che componendo le ragioni ricavasi

$nr:Ns::nA:VB$; onde $nA:VB::pm:pT$; ma $An=$
 pm ; dunque $VB=pT$, ovvero $Vb=PT$; basta dunque con-
 durre la VT , che parallela alla MPN vada a incontrare in T
 l'ascissa PA prolungata, ed allora la congiunta TM farà la
 tangente cercata.

C O R O L L A R I O .

49. Dal carattere della curva AN si può facilmente
 venire in cognizione dell'altra AM ; poiche se la prima fa-
 rà una Parabola, la seconda farà un' Iperbole; e se la pri-
 ma farà un Cerchio, il di cui diametro AP , la seconda fa-
 rà una Parabola &c.

E S E M P I O XVI.

50. Sia la Curva MN (*Fig. 14.*) una Logaritmica, o
 Logistica ordinaria, a cui dall'asse AP suppongansi tirate,
 oltre alle due infinitamente prossime PM , pm , altre due ap-
 plicate pure infinitamente prossime QN , qn . Per la natura
 di questa Curva, in cui le porzioni dell'ascissa vanno in
 progressione aritmetica, mentre l'applicate vanno in progres-
 sione geometrica, dovrà esser sempre $Pp=Qq$; in oltre, sup-
 posto,

PARTE SECONDA, CAPITOLO I. 139

posto, che siano condotte le tangenti MT, Nr, vi sono le analogie $PM:pm::PT:pT$; $QN:qn::Qr:qr$; ma per la detta proprietà della Curva abbiamo $PM:pm::QN:qn$; dunque $PT:pT::Qr:qr$; e convertendo, e permutando, si avrà finalmente $Pp:Qq::PT:Qr$; ma $Pp=Qq$; dunque $PT=Qr$; cioè nella Logistica ordinaria la sottangente è da pertutto l'istessa.

E S E M P I O XVII.

51. Sia la Logistica spirale PBFA (Fig. 15.) cioè di tal natura, che divisa la periferia circolare PIC in parti eguali PG, GH, HI &c., e tirati dal centro A i raggi AP, AG, AH, AI &c. sia sempre $PA:BA::BA:DA::DA:EA$ &c. supposti i detti raggi infinitamente prossimi, siccome le porzioni infinitesime PB, BD divengono tante rette, vi saranno due triangoli PAB, ABD, che avranno per le cose dette due lati proporzionali a due lati, e un angolo eguale ad un angolo, giacche per l'eguaglianza delle PG, GH &c. gli angoli al centro PAB, BAD sono eguali; onde il triangolo PBA sarà simile al triangolo BAD, e così sempre. Dal centro A cogli intervalli AB, AD descrivansi ora gli archetti Bp, Dq; questi saranno perpendicolari alle AP, AB, e però i triangoletti BpP, BqD saranno simili; e così sempre; vi sarà dunque ancor sempre l'analogia costante $Pp:pB::Bq:qD$; ma questa esprime il rapporto dell'ascissa AP alla sottangente AT, o dell'ascissa AF alla sottangente Ar; dunque nella Logistica spirale il rapporto dell'ascissa alla sottangente è in ragione costante.

SCO-

S C O L I O.

52. Chi volesse trovare il valore della funnormale PS (Fig. 6. 7.) la quale giace tra l'applicata PM, e la normale SM, offervi, che vi è sempre l'analogia $M o : o m$ (Fig. 6.), ovvero $m o : o M$ (Fig. 7.) :: PM : PS; onde trovato il rapporto della prima ragione con l'esposto metodo; si verrà in cognizione della funnormale ricercata.



CA-

CAPITOLO SECONDO

Del rapporto degli Spazj curvilinei.

PROPOSIZIONE II.

53. **S**iano le figure $AMNQ$, $amnq$ (Fig. 16. 17.) di tal natura, che divise le loro altezze AQ , aq proporzionalmente in P , p , l'applicate PM , pm parallele alle basi QN , qn siano fra loro eguali; dico, che tali figure staranno come le loro altezze AQ , aq .

Imperciocchè compiuti i parallelogrammi $AQNB$, $aqnb$, e da' punti M , m tirate le MC , mc parallele alle AP , ap , si avrà per la costruzione $AB = ab$, $AC = ac$, e nelle figure $AMNB$, $amnb$, l'applicate CM , cm , BN , bn ad eguali altezze AC , ac , AB , ab faranno proporzionali; dunque per essere in egual numero di quantità continuamente proporzionali una delle antecedenti ad una delle antecedenti, come tutte a tutte, la figura $AMNB$ starà alla figura $amnb$, come la BN alla bn , o come la AQ , alla aq ; ma i parallelogrammi $AQNB$, $aqnb$ a causa dell'eguali basi QN , qn , stanno anch'essi come l'altezze AQ , aq ; dunque ancora le rimanenti figure $AMNQ$, $amnq$ staranno fra loro come l'altezze AQ , aq ; il che &c.

Co.

COROLLARIO.

54. Dunque benchè le figure $AVMNT$, $aumn$ (Fig. 18.19.) siano tra gli asintoti AC , AQ , ac , aq , se all' ascisse AQ , aq , tagliate proporzionalmente ne' punti P , p , Q , q , siano applicate le PM , pm eguali, ed eguali le QN , qn , l' aree $AVMNQ$, $aumnq$, per trovarsi nell' istesse circostanze delle due antecedenti figure, staranno come le AQ , aq , vale a dire, come l' ascisse; e se l' ascisse AB , ab , come pure le AC , ac siano eguali, e proporzionali l' applicate BN , bn , CM , cm , l' aree $ATNMC$ $atnmc$ staranno come le MC , mc ; vale a dire come l' applicate.

PROPOSIZIONE III.

55. Le figure congeneri $AVMNQ$, $aumnq$ (Fig. 16.17.18.19.), nelle quali l' applicate PM , pm sono in qualunque ragione moltiplicata, o sommoltiplicata, tanto diretta, che inversa, dell' ascisse AP , ap , stanno fra loro generalmente in ragion composta dell' ascisse, e dell' applicate.

Siano ineguali l' ascisse AP , ap , AQ , aq , ma l' applicate PM , pm siano eguali, ed eguali siano le QN , qn , è manifesto per la supposta natura di tali figure, che l' ascisse AQ , aq saranno tagliate proporzionalmente in P , p , e in Q , q ; perchè stando $\frac{+r}{PM} : \frac{+r}{QN} :: AP : AQ$; e $\frac{+r}{pm} : \frac{+r}{qn} :: ap : aq$, farà $AP : ap :: AQ : aq$; onde (per l' antecedente, e suo Corollario) l' aree $AVMNQ$, $aumnq$ staranno come le AQ , aq ;
vale

PARTE SECONDA, CAPITOLO II. 193

vale a dire, quando nelle figure in questione l'ascisse sono ineguali, ed eguali l'applicate, l'aree stanno come l'ascisse.

Siano ora in dette figure eguali l'ascisse AP, ap, AQ, aq ; ed ineguali l'applicate PM, pm, QN, qn ; è manifesto per la natura di tali figure, che le PM, QN, pm, qn faranno proporzionali, e che in conseguenza tanto l'applicate della prima, quanto l'equinumeriche della seconda congenere figura sono in progressione geometrica continua, onde l'aree $AVMNQ, aumnq$, staranno come le QN, qn , vale a dire, quando nelle figure in questione l'ascisse sono eguali, ed ineguali l'applicate, l'aree stanno come l'applicate.

Dunque fatte ineguali tanto l'ascisse, che l'applicate, l'aree suddette staranno in ragion composta dell'ascisse, e dell'applicate; onde tutte le figure, nelle quali le potenze dell'applicate sono direttamente, o inversamente proporzionali all'ascisse, stanno come i prodotti dell'ascisse nell'applicate corrispondenti; il che &c.

COROLLARIO I.

56. Se vi fossero due equazioni $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^3, \overline{ap}^2 = \overline{pm}^3$, le Curve, alle quali competono tali proprietà, e che sono della famiglia delle Parabole, entrano anch'esse nel numero delle figure in questione, perche potendosi tali equazioni

cangiare in quest'altre $\overline{AP} = \overline{PM}^{\frac{2}{3}}, \overline{ap} = \overline{pm}^{\frac{2}{3}}$, vedesi, che le potenze dell'applicate sono proporzionali all'ascisse, e però le loro aree stanno come i prodotti dell'applicate

Bb nell'a-

nell' asicisse. Il medesimo dicasi di due equazioni generali

$$\overline{AP}^n = \overline{PM}^{n+1}, \overline{ap}^n = \overline{pm}^{n+1}.$$

COROLLARIO II.

57. Quanto si è detto risguardo a due figure congeneri, è facilmente conoscibile, che può applicarsi alla medesima figura, purchè possieda anch' essa gli esposti caratteri; imperciocchè se l'area AVMP stà all'area *aump*, come $AP \times PM : ap \times pm$; e se l'area AVMNQ stà all'area *aump*, come $AQ \times QN : ap \times pm$; anche l'area AVMP stà all'area AVMNQ, come $AP \times PM : AQ \times QN$; onde supposto per maggior brevità, che il carattere di tutte le Curve in que-

stione sia generalmente $AP = \overline{PM}^n$ (intendendo per *n* un numero qualunque intero, o rotto, positivo, o negativo), il

prodotto $AP \times PM$ stà generalmente come \overline{PM}^{n+1} ; sicchè l'area APM di qualunque Curva in questione stà anch' es-

sa generalmente come \overline{PM}^{n+1} ; ovvero (giacchè è $\overline{AP}^{\frac{1}{n}} = PM$)

come $\overline{AP}^{\frac{n+1}{n}}$; qual segno positivo riguarda le Parabole, ma quando *n* ha il segno negativo, l'espressione è per l'iper-

bole tra gli asintoti, e allora l'area APM stà come $\overline{AP}^{\frac{n-1}{n}}$, perchè dividendo $-n+1$ per $-n$, il quoto è $\frac{n-1}{n}$.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

38. *Posto, che una Curva sia reciproca d' un' altra, vale a dire, che abbia l' ordinate reciproche all' ordinate d' un' altra Curva, trovare il rapporto de' suoi Spazj curvilinei.*

Sia la Curva VSE (Fig. 20.) reciproca alla Curva AMB, cioè che abbia l' applicate PS, CE reciproche all' applicate corrispondenti PM, CB; ed alla SPM tirinsi l' infinitamente prossima *spm*; siccome l' area infinitesima *PSsp* non differisce sensibilmente dal rettangolo *SPp*, farà questo rettangolo l' elemento dell' intero spazio curvilineo AVSEC; ma la SP è per l' ipotesi inversamente proporzionale alla PM, cioè stà come $\frac{1}{PM}$; dunque lo spazio elementare *PSsp* starà come $\frac{Pp}{PM}$; onde se dalle circostanze, o sia dalla natura della Curva AMB si potrà avere la somma della formula $\frac{Pp}{PM}$, come apparirà dagli Esempj in appresso, si avrà il rapporto degli spazj curvilinei, che riempiono l' area AVEC; il che &c.

COROLLARIO I.

39. Con l' istesso metodo si può indagare la relazione dell' aree AVSP, AVEC, quando l' applicate PS, CE non sono addirittura reciproche alle applicate PM, CB, ma a due altre indeterminate, che abbiano a queste un rapporto regolare.

Bb 2

Co-

COROLLARIO II.

60. E' poi evidente, che in vece della Curva AMB reciproca alla VSE, può pigliarsi qualunque altra Curva ad essa AMB non reciproca, purché sostituito alla Pp il valore della Mo , e paragonate l' areole elementari sotto l' espressione di $Mo \times PS$, si possa, fatte le loro somme, avere in termini cogniti il rapporto dell' aree intere APS, AEC, come meglio apparirà dagli Esempj, che si addurranno.

E S E M P I O I.

61. Se la Curva AMB (Fig. 20.) è una Parabola quadratica, o Apolloniana, la sua reciproca VSE farà un' Iper-

bole cubica, in cui è $\overline{PS}^2 : \overline{CE}^2 :: AC : AP$; onde tirata la RM normale alla Curva Parabolica nel punto M, e da questo condotta la Mo parallela all' asse AP; per esser simili i triangoli Mom , MPR, si avrà l' analogia $Mo : om :: MP : PR$, onde farà $\frac{Mo}{MP}$, ovvero $\frac{Pp}{MP} = \frac{om}{PR}$; e in conseguenza lo spazio AVSP farà come la somma di tutte le $\frac{om}{PR}$; ma nella

Parabola quadratica la sunnormale RP è sempre una quantità costante, essendo, come delle cose dette (52.) può ricavarfi, eguale alla metà del parametro; dunque la somma di tutte le $\frac{om}{PR}$ farà come la pm , ovvero come la PM, e per-

ciò

PARTE SECONDA, CAPITOLO II. 197

ciò l'area AVSP starà anch' essa come la PM; vale a dire che l' aree iperbolico-cubico-asintotiche stanno come le corrispondenti ordinate alla Parabola quadratica, ovvero sono in ragion sudduplicata delle proprie corrispondenti ascisse.

E S E M P I O II.

62. Se la Curva AMB (Fig. 21.) è un semicerchio, l'area AVSP della sua Curva reciproca VSET tra gli asintoti AV, BT starà come l'arco circolare corrispondente AM; imperciocchè tirata dal centro C la CM, per la similitudine de' triangoli Mom, MPC, farà $Mo : Mm :: PM : MC$; onde

$$\frac{Mo}{PM} = \frac{Mm}{MC}; \text{ sicche lo spazio curvilineo AVSP starà come}$$

tutte le $\frac{Mm}{MC}$ per tutto il tratto dell' arco AM; ma il rag-

gio CM è costante; dunque la somma di tutte le dette $\frac{Mm}{MC}$

stanno come l' arco AM; e in conseguenza l' area AVSP è proporzionale al corrispondente arco AM; sicche l' area AVSP a tutta l' area AVETB starà come l' arco AM alla semiperiferia circolare ADB.

E S E M P I O III.

63. Se la figura asintotica AVSC (Fig. 22.) sia tale, che ogni sua applicata PS sia reciproca alla corrispondente EA quarta proporzionale dopo l'ascissa CP, l'applicata PM, ed il diametro CA del semicerchio AMC, l' area asintotica AVSP.

198 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

AVSP starà come il settore CMA; imperciocchè tirata alla MPS l'infinitamente prossima *mps*, e dal centro F, come ancora da' punti A, C condotte a' punti M, *m* le FM, AM, CM, *Cm*, indi abbassate le perpendicolari Mo, *mn*, per esser la PS reciproca alla $AE = \frac{PM \times CA}{CP}$ per la costruzione,

l'areola SPps starà come $\frac{Pr \times CP}{PM}$. Essendo poi simili i triangoli FMP, Mmo, farà FM:MP::Mm:Mo=Pr== $\frac{MP \times Mm}{FM}$; onde $\frac{Pr \times CP}{PM}$ starà come CP×Mm.

In oltre a causa de' triangoli simili CPM, Mnm, farà CP:CM::mn:Mm== $\frac{CM \times mn}{CP}$; onde fatta la sostituzione, CP×Mm starà come CM×mn, ovvero come Cm×mn; vale a dire l'areola SPps è proporzionale al rettangolo Cmn, ovvero al triangolo Cnm sudduplo di esso; onde tutta l'area AVSP farà proporzionale al Settore circolare corrispondente AMC,

COROLLARIO I.

64. Il Settore AMC come eguale al Settore AMF, ed al triangolo FMC, è eguale all'arco AM nella metà del raggio FC, e alla semiordinata PM nella metà del medesimo raggio FC, cioè = (AM+PM)× $\frac{1}{2}$ FC; dunque tolta la costante $\frac{1}{2}$ FC, l'area AVSP farà proporzionale alla

la

la somma dell' arco AM, e dell'applicata PM; ma tal forma, come è notissimo, le femiordinate della Cicloide; dunque l' aree asintotiche della figura AVSC staranno come le corrispondenti femiordinate della Cicloide.

COROLLARIO II.

65. Se si fa la comparazione di questa figura asintotica AVSC con la Versiera Grandiana (29.), si vedrà, che sono congeneri, o sia dell' istessa natura, onde l' aree asintotiche della Versiera saranno proporzionali all' ordinate della Cicloide.

ESEMPIO IV.

66. Sia AMB (Fig. 23.) una Logistica ordinaria, il di cui asintoto DN. Dal punto A conduca parallela alla DN la AP, che prolunghisi indefinitamente da ambe le parti, e tirata all' applicata NMP, l' infinitamente prossima nmp , come ancora la tangente sMT, che incontri ne' punti s, T le DN, PA prolungate, da i punti M, m si abbassino le perpendicolari Ms, mi .

Per l' analogia $MN : Ns :: ms : sM$, farà $sM = \frac{ms \times Ns}{MN}$;

onde l' areola elementare $mMNn$, che non differisce sensibilmente dal rettangolo sMN , starà come $ms \times Ns$, cioè per essere la Ns costante (50.), come la ms ; sicche se gl' incrementi dell' applicate vengono da A verso P, tutta l' area ADNMs starà come l' applicata PM; o sia come la AE, vale a dire, come la differenza delle due applicate AD, MN.

com-

comprendenti la detta area $ADNM$. Ma se i detti incrementi dell'applicate vengono da B verso N , cioè se in vece della ms si consideri l'eguale Mi , tutta l'area asintotica MBN starà come l'applicata MN .

E S E M P I O V.

67. Sia DN (Fig. 24.) un'Iperbole ordinaria tra gli asintoti VC, CA , e la CA serva d'applicata alla Logistica AMB , il di cui asse sia la VC prolungata indefinitamente verso O ; indi estesa l'applicata iperbolica NP fino alla Logistica in M , e condotta ad essa l'infinitamente prossima npm , tirinsi dal punto M la tangente MO , e la MS parallela alla AC .

Giacche l'areola elementare iperbolica $PNnp$ non differisce sensibilmente dal rettangolo $PN \times Pp$, ovvero $PN \times Ms$, e giacche per i triangoli simili OSM, msM , è la $Ms = \frac{SM \times sm}{SO} = \frac{PC \times sm}{SO}$, la detta areola starà come

$\frac{sm \times PC \times PN}{SO}$; ma per la natura della detta Iperbole il

rettangolo $PC \times PN$ è sempre costante, come pur costante è la sottrattante SO della Logistica (50.); dunque l'areola $PNnp$ starà come la sm , e in conseguenza tutta l'area iperbolica $ADNP$ starà come l'intera applicata corrispondente PM della Logistica; dove vedesi, che si è presa l'area $ADNP$, e non l'area $CVNP$, perche gl'incrementi ms dell'applicate PM vengono da A verso P , e non viceversa.

Co-

COROLLARIO I.

68. Per essere $pnDA:PNDA::pm:PM$, dividendo, sarà $pnNP:pnDA::ms:mp::FS:FC$; ma per la proprietà della Logistica le parti dell'asse corrispondono all'applicate, come i logaritmi a' numeri; dunque le FS, FC , ovvero l'aree $pnNP, pnDA$ corrisponderanno all'applicate SM, CA , ovvero alle CP, CA , come i logaritmi a' numeri. Sicche con le Tavole de' Logaritmi iperbolici si può avere il rapporto di due trapezj iperbolici dati $pnNP, pnDA$; imperciocche presa la Cp per l'unità, e trovati in numeri i valori delle rette CP, CA , i loro logaritmi rappresenteranno gli spazj iperbolici $pnNP, pnDA$.

COROLLARIO II.

69. Giacche, come si è detto, nella Logistica le parti dell'asse corrispondono all'applicate, come i logaritmi a' numeri, e perciò le ragioni tra l'applicate crescono come l'ascisse tra esse applicate intercette; ne verrà, che la CS alla CF , ovvero la PM alla pm , starà come la ragione, che passa tra le due AC, MS , o sia tra le due AC, PC , alla ragione, che passa tra le due AC, mF , ovvero tra le due AC, pc ; ma le PM, pm , si è dimostrato, che stanno come l'aree iperboliche $ADNP, ADnp$, e le due AC, CP stanno per la natura dell'Iperbole, come le due PN, AD , come ancora le due AC, Cp stanno come le due pn, AD ; dunque l'aree iperboliche $ADNP, ADnp$ staranno come le

Cc

ra-

ragioni, che passano tra le due AD, PN, e le due AD, *pn*; vale a dire due aree iperboliche racchiuse dall'applicate, dall'ascissa, e dalla curva, stanno come le ragioni dell'applicate, che le racchiudono; qual verità fu prima d'ogni altro per via diversa dimostrata con sommo applauso dal Padre Gregorio da S. Vincenzo, celebre Geometra dello scorso secolo, e lume chiarissimo dell'inclita Compagnia di Gesù. Si può per altro rendere il Problema anche più generale, considerando due iperboli di potenza diversa, e trovando nella seconda di queste un'area, che stia ad un'area assegnata nella prima in una data ragione.

COROLLARIO III.

70. Dall'esser l'aree iperboliche come le ragioni dell'applicate, che le racchiudono, si deduce nuovamente ciò, che nel Corollario primo (68.) si è dimostrato; imperciocchè sia una iperbole equilatera MNOD (*Fig. 35.*) tra gli asintoti CA, CB, il di cui centro C, ed il di cui semiasse trasverso CM. Nell'asintoto CB prendansi le CP, CQ, CR, CB, che siano in progressione geometrica continua, e da' punti P, Q, R, B tirinsi alla curva le PM, QN, RO, BD parallele all'altro asintoto CA; è chiaro, che per essere ancora l'applicate PM, QN, RO, BD in progressione geometrica continua, l'aree iperboliche PMNQ, QNOR, RODB faranno eguali; onde le loro somme, cioè $o, PMNQ, PMOR, PMDB$ faranno in una progressione aritmetica continua. Dunque se la CP si fissi per l'unità, e le rette CQ, CR, CB si pigliano come numeri, i logaritmi di tali numeri faranno $o, PMNQ$

o, PMNQ, PMOR, PMDB; trovati dunque nelle Tavole de' Logaritmi iperbolici i Logaritmi corrispondenti a' numeri delle parti eguali, che formano le grandezze CQ, CR, CB, essi rappresenteranno, come di sopra si disse (68.), le menzionate aree iperboliche.

S C O L I O I.

71. Il presente Esempio (67.) può dimostrarsi con più precisione anche in questa maniera. Per esser simili i triangoli MSO, Msm (Fig. 24.), si avrà $ms = \frac{Mr \times SO}{SM} = \frac{Pp \times SO}{CP}$;

se dunque si supponga, che la curva DN sia un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti VC, CA, starà ms come $PN \times Pp \times SO$; quando dunque la sottangente SO sia costante, l'areola NPPn starà come ms ; ma fuori della Logistica comune non vi è curva, che abbia la sottangente costante; dunque l'intero spazio iperbolico asintotico ADNP starà come la PM, o sia come l'applicata della detta Logistica, presa parallelamente all'asintoto CO.

COROLLARIO IV.

72. Fatto centro C (Fig. 25.) (che è il centro dell' Iperbole DN tra gli asintoti VC, CL) con l'intervallo AC (che è una porzione a piacere dell' asintoto VC) descrivasi il quadrante ABC, e divisane la periferia in parti eguali AQ, Qq &c., indi condotti i raggi QC, qC &c., taglinfi da questi le porzioni continuamente proporzionali CM, Cm &c., la curva AMmO, che passa per questi punti, chiamasi, come è

Cc 2

noto

noto, Logistica spirale; ora è chiaro, che gli archi AQ, Aq sono i logaritmi de' numeri espressi dall'applicate CM, Cm ; sicche con gl'intervalli CM, Cm , &c. descritti gli archi MP, mp &c.; verrà la AC divisa ne' punti P, p &c. in porzioni continuamente proporzionali; quindi i trapezj iperbolici $ADNP, PNnp$ saranno eguali, perche eguali sono le ragioni dell'applicate AD, PN, pn , che li racchiudono (69.), e però starà il primo al secondo come $AQ:Qq$, e così sempre; onde presi gli egualmente moltiplici degli antecedenti, e de' conseguenti, starà qualunque arco AQ , all'arco Aq , come il trapezio $ADNP$, al trapezio $ADnp$; e l'arco qQ all'arco qA , come il trapezio $pnNP$ al trapezio $pnDA$; che se si congiungeranno le DC, NC, nC ; siccome i trapezj $ADNP, PNnp$ eguagliano i settori DCN, NCn (come ravvisasi, togliendo dagli eguali triangoli DAC, NPC , che sono le metà degli eguali rettangoli DAC, NPC , il comune EPC , e aggiungendo NDE), gli archi AQ, Aq , ovvero i settori circolari ACQ, ACq , che stanno come i trapezj $ADNP, ADnp$, staranno ancora come i settori iperbolici DCN, DCn . Si potrà dunque per mezzo della Logistica spirale assegnare co' logaritmi iperbolici il rapporto di due incogniti archi di cerchio, e in conseguenza di due settori, o di due angoli pure incogniti.

S C O L I O II.

73. Alle volte si può venire in cognizione, che gli spazi d'una curva stiano direttamente, o inversamente come le potenze dell'applicate d'un'altra curva; in tal caso se abbisognasse ridurre il rapporto de' detti spazi curvilinei a sole applicate d'una curva, si può eseguir ciò con un facil metodo esposto nella seguente PRO-

PROPOSIZIONE V.

74. *Costruire una figura, le di cui applicate siano direttamente, o inversamente proporzionali all'applicate d'un'altra data figura elevate a qualunque potenza.*

N. 1. Sia AQSR la data figura (Fig. 26.27.), le di cui applicate PR, QS. Ergasi fulla AP dal punto A la perpendicolare AO indefinita verso O, e intorno ad essa come asse descrivasi una Parabola AB, la di cui natura generale sia

$\overline{AL}^n : \overline{AO}^n :: \overline{LB} : \overline{OD}$, con questa avvertenza, che se n (per cui intendo un numero positivo qualunque intero, o rotto) farà maggiore dell'unità, la detta Parabola AB deve rivolgere all'asse AO la convessità, e viceversa la concavità, se n è minore dell'unità; e da' punti R, S tirinsi le RB, SD parallele all'asse AP, che tocchino co' punti estremi B, D la detta Curva AB.

Per esser $PR = AL$, $QS = AO$, si avrà $\overline{PR}^n : \overline{QS}^n :: \overline{LB} : \overline{OD}$; onde prolungate le RP, SQ, e fatta $PE = LB$, $QG = OD$, e così sempre, ne nascerà una nuova figura AQGE, le di cui applicate staranno come le potenze delle corrispondenti PR, QS.

N. 2. Sia ora ACSQ (Fig. 61.62.) la data figura, le di cui applicate PR, QS. Da' punti R, S tirate indefinitamente le SD, RB parallele all'asse AP, intorno alla AO eretta normalmente in A alla AP, e considerata come asse, descrivasi un' Iperbole DB tra gli asintoti AV, AL, la di cui

cui natura generale venga espressa dall'equazione $\overline{AO} : \overline{AL} :: \overline{OD} : \overline{LB}$.

Essendo $QS = AO$, $PR = AL$, avremo $\overline{QS} : \overline{PR} :: \overline{OD} : \overline{LB}$; onde prodotte le SQ , RP , e fatta $QG = OD$, $PE = LB$, e così da per tutto, ne risulterà una nuova figura $AEGQ$, le di cui applicate PE , QG saranno inversamente proporzionali alle potenze delle corrispondenti applicate PR , QS .

Con che si è soddisfatto a quanto si era proposto.

COROLLARIO I.

75. Se la data figura $ARSH$ (Fig. 28.) farà una curva ritornante in se stessa, è chiaro anche con la sola ispezione, che la figura da ritrovarsi deve avere un regresso, o stesso contrario. Così se $ARSH$ farà un cerchio, il di cui centro Q , le PE eguali alle BL cresceranno fintanto, che la QG eguagli la massima DO ; indi tutte le pe eguali alle bl anderanno decrescendo talmente, che l'area QGH farà eguale, e simile all'area QGA , il che accaderà sempre quando la figura ASH senza regressi farà divisibile in due parti eguali, e simili ASQ , HSQ , come è evidente.

COROLLARIO II.

76. E' facile il rintracciar la natura della figura $AQGE$ (Fig. 26. 27), poichè fatto $= 1$ il parametro della Parabola AB , farà sempre $QG = \overline{QS}$. Così se la data figura ASQ (Fig. 26.)

PARTE SECONDA, CAPITOLO II. 207

(Fig. 26.) è una Parabola qualunque, in cui le potenze dell'applicate siano proporzionali all'ascisse, la richiesta figura AEGQ farà sempre un triangolo. Parimente se la data figura AQSR (Fig. 27.) è un'Iperbole qualunque tra gli asintoti, in cui le potenze dell'applicate siano reciproche all'ascisse, la richiesta figura AQGE farà sempre un'Iperbole ordinaria tra gli asintoti, il che non ha bisogno di prova. Essendo poi $PE = LB$ (Fig. 61. 62.), e l'equazione alla Curva DB essendo

$\overline{AL} = LB$, l'altra equazione alla figura AEGQ farà $PE =$

\overline{PR} , onde sostituito l'equivalente di \overline{PR} in termini di AP, farà facile il conoscere la natura della figura AEGQ. Così se la figura ACSQ (Fig. 62.) farà un'Iperbole tra gli asintoti, le di cui ascisse siano reciproche alle potenze dell'applicate, la figura AGQ farà sempre un Triangolo.

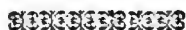
COROLLARIO III.

77. Con l'istesso metodo, e con un ordine inverso di figure, è chiaro, che si può costruire una figura di tali applicate, che le loro potenze stiano direttamente, o inversamente come l'applicate d'un'altra figura.



CA-

CAPITOLO TERZO

Della quadratura degli Spazj curvilinei.

PROPOSIZIONE VI.

78. **I**N qualunque Figura ADN (Fig. 24. 29. 30. 31. 32. 33.), il di cui asse sia AP, e i due spazj curvilinei ADNp, ADnp siano proporzionali alle corrispondenti semiordinate PM, pm della Curva AMB, che abbia l'asse AP comune con detta figura ADNp, lo spazio curvilineo ADNp è eguale al rettangolo della semiordinata NP nella sottangente PT.

N. 1. Suppongansi le MN, mn infinitamente prossime, e dal punto M tirinsi la Ms parallela alla AP, e la tangente MT, che segghi in T l'asse AP.

Stando per l'ipotesi lo spazio curvilineo ADNp, come la PM, anche l'areola elementare NnpP, ovvero il rettangolo NPp starà come la retta elementare ms; si avrà dunque l'analogia $ms:Pp::PN:1$; sicche sarà $1 \times ms = NPp$, cioè una quantità costante moltiplicata nella porzione elementare ms eguaglierà l'elemento NnpP dell'area ADNp, e in conseguenza una quantità costante moltiplicata nell'intera pm, o PM,

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 209

o MP, eguaglierà tutta l'area ADNP; ma $ms:Pp$, ovvero $ms:sM::MP:PT::PN:1$; e perciò $1 \times MP = PT \times PN$; dunque l'area ADNP, che è eguale al prodotto $1 \times MP$, sarà ancora eguale all'altro prodotto $PT \times PN$; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Siccome lo spazio ADnp, stà allo spazio ADNP, come $pm:PM$ per l'ipotesi; dividendo, starà lo spazietto PNnp, allo spazio ADNP, come $sm:PM$, ovvero come $Pp:PT$; dunque moltiplicando gli ultimi due termini per PN, e permutando starà il piccol rettangolo PNnp al rettangolo $Pp \times PN$, come l'area ADNP al rettangolo $PT \times PN$; ma i primi due termini sono eguali; dunque eguali faranno ancora i secondi, cioè l'area ADNP sarà eguale al rettangolo $PT \times PN$; il che &c.

COROLLARIO I.

79. Prolungata qualunque VC parallela alla semiordinata PN finche incontri in O la tangente TM anch'essa prolungata, indi condotta la NE parallela alla AP, siccome si è detto, che il rettangolo Npp stà allo spazio curvilineo NDAP, come $sm:PM$; farà ancora, prese le egualmente multipli degli antecedenti, il rettangolo iscritto PNE allo spazio NDAP, come $SO:PM$, perche stà il rettangolo PNE al rettangolo Npp:: $SM:Ms::ms:SO$; il che sia detto riguardo alle Figure 24. 29. 30. 31.; nell'altre poi 32. 33. è evidente, che il rettangolo iscritto PNE stà allo spazio NDAP

D d

come

210 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

come $PA:PT$, cioè come l'ascissa alla sotttangente. Ma nelle *Figure 24. 29. 30.* prolungata la tangente MT fino all'intersezione nel punto R dell'ascissa AQ anch'essa bastantemente estesa, per essere $AP \times PN:TP \times PN::AP:TP::RM:TM::RQ:AQ$, ne verrà, che lo spazio curvilineo $ADNP$ starà al rettangolo circoscritto, come $AQ:RQ$, cioè nuovamente come l'ascissa alla sotttangente presa dalla parte concava della curva AM .

COROLLARIO II.

80. Per avere nelle *Figure 24. 29. 30.* il valore della PT , si osservi, che per i triangoli simili RQM , TPM vi è l'analogia $RQ:PM::QM:PT$, ovvero $RQ:AQ::AP:PT$; onde $PT = \frac{AQ \times QM}{RQ}$ si troverà facilmente, conosciuta la natura della curva AMB , e in conseguenza la sua sotttangente RQ (17.).

COROLLARIO III.

81. Quando dunque sia noto, che qualunque curva DN abbia l'aree $ADNP$ proporzionali alle corrispondenti applicate PM della curva AM , intorno al medesimo asse AP , si potrà di dette aree $ADNP$ ottenere sempre la quadratura.

Co-

COROLLARIO IV.

82. Può darfi, che le due curve in questione coincidano; ex. gr. se la curva AM (*Fig. 23.*) fosse tale, che lo spazio esteriore ADNM stesse come la semiordinata MP dello spazio interiore, la dimostrazione è sempre l'istessa, perchè essendo qui ancora $MN \propto Nn : ADN M :: sm : PM :: sM : PT$, moltiplicando per MN li due ultimi termini, se ne ricava, essere $PT \propto MN = ADN M$.

COROLLARIO V.

83. Che se poi la curva AM fosse di tal natura, che avesse l'area asintotica, o indefinita MBN proporzionale alla semiordinata MN, allora ravvifasi ocularmente, che la quadratura dello spazio asintotico MBN eguaglia il rettangolo della sua fortangente Nr nella sua semiordinata MN.

S C O L I O.

84. Osservisi, che se stando fissa la figura AMP (*Fig. 24. 29. 30. 31. 32. 33.*), l'applicate dell'altra figura ADNP andassero crescendo con ordine contrario a quello, in cui si espongono delineate, ovvero se amendue le Curve AM, DN, partendo dall'istesso vertice rivolgersero la loro concavità all'asse comune AP, non si potrebbe più averare, che l'area ADNP eguagli il rettangolo TPN, perchè questo riuscirebbe visibilmente, o maggiore, o minore di essa; onde è,

D d 2 che

212 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

che dall'addotte figure si può unicamente ricavare tal verità, e da esse può riconoscersi, qual contegno debbasi usare quando l'area curvilinea, che imprendesi a quadrare, rivolga la convessità, o la concavità all'asse.

E S E M P I O I.

85. Se la curva AN (*Fig. 30.*) è una Parabola Apolloniana, la curva AM farà una Parabola cubica, perchè volgendo essa Parabola AN la convessità all'asse AP, la sua area APN starà come \overline{AP}^3 (57.), e perciò \overline{AP}^3 starà come PM, cioè farà $AQ = \overline{QM}^3$, che è il carattere della Parabola cubica; ma per essere in questa la sottangente $RQ = 3AQ$ (19.), è la $PT = \frac{1}{3}AP$ (80.); dunque farà lo spazio Parabolico $APN = \frac{1}{3}AP \times PN$, cioè la terza parte del circoscritto rettangolo. Che se la Parabola Apolloniana AN (*Fig. 29.*) rivolgerà la concavità all'asse AP, la sua area ANP starà come $\overline{AP}^{\frac{3}{2}}$, che dovendo esser proporzionale all'applicata PM della curva AM, darà di tal curva l'equazione $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^3$, cioè farà anch'essa del genere Parabolico; ma la di lei sottangente $PT = \frac{2}{3}AP$ (22.); dunque farà lo spazio parabolico $ANP = \frac{2}{3}AP \times PN$, cioè due terzi del circoscritto rettangolo, come appunto dimostrò Archimede.

ESEM-

E S E M P I O II.

86. Se la curva AN (Fig. 30.) è una Parabola cubica, la curva AM farà una Parabola biquadratica; perchè lo spazio APN itarà come \overline{AP}^4 (57.), e però si avrà $AQ = \overline{QM}^4$; ma la sottangente RQ di questa è $= 4AQ$ (22.), e la $PT = \frac{1}{4}AP$ (80); dunque farà lo spazio APN $= \frac{1}{4}AP \times PN$.

E S E M P I O III.

87. Sia compresa la curva AN (Fig. 29. 30.) nell' equazione generale a tutte le Parabole, Paraboloidi, e Curve agnate $\overline{AP}^n = PN$, intendendo per n qualunque numero affermativo intero, o rotto, la curva AM farà sempre compresa nell' equazione generale $AQ = \overline{QM}^{n+1}$; ma questa generale espressione ha la sottangente $(n+1)RQ$ (22.), e in conseguenza è generalmente la $PT = \frac{1}{n+1}AP$ (80.); dunque la quadratura generale degli spazj Parabolici d' ogni genere farà $\frac{1}{n+1}AP \times PN$; sicche se fosse $n = \frac{1}{2}$, la quadratura della Parabola, in cui $AP = \overline{PN}^2$, farebbe $\frac{2}{3}AP \times PN$ come sopra (85.). Se $n = 4$, tal quadratura farebbe $\frac{1}{5}AP \times PM$; dove conoscesi, che quando n significa un numero

214. ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

mero intero, l'area Paraboliche, le quali si quadrano, sono dalla parte convessa; e quando n esprime un rotto, sono dalla parte concava della curva; e ciò per le cose dette (22.).

Che se l'equazione generale alla curva AN fosse $\overline{AN}^n = \overline{PN}^m$,

l'area ANP starebbe come $AP \times PN$, ovvero come $\overline{AP}^{\frac{m+n}{m}}$ (57.); onde l'equazione all'altra curva AM farebbe $PM =$

$\overline{AP}^{\frac{m+n}{m}}$, ovvero $AP = \overline{PM}^{\frac{m}{m+n}}$, la di cui sottangente $PT = \frac{m}{m+n} AP$ (22.); quindi la quadratura dell'area parabolica ANP farà $\frac{m}{m+n} AP \times PN$.

COROLLARIO.

88. Sarà dunque generalmente il rettangolo APN allo spazio APN (Fig. 29. 30.) di qualunque Parabola, o Paraboloide, come $AP \times PN : \frac{1}{n+1} AP \times PN$, cioè come $1 : \frac{1}{n+1}$; il che si può dedurre ancora dalle cose dette (81.), perchè la ragione di QR:AQ, che dà il ragguaglio del rettangolo APN allo spazio curvilineo ANP sia come $1 : \frac{1}{n+1}$.

ESEM-

E S E M P I O IV.

89. Se la curva DNn (Fig. 33.) è un' Iperbole cubica, la di cui equazione $AP = \overline{PN}^2$, l'altra curva AM farà una Parabola quadratica (61.); onde per essere TP doppia di AP (24.), farà lo spazio asintotico $DAPN = 2AP \times PN$.

E S E M P I O V.

90. Se la curva DNn è un' Iperbole tra gli asintoti, la di cui equazione $AP = \frac{1}{PN}$, la curva AM farà una Parabola, la di cui equazione $\overline{AP}^2 = \overline{AM}^3$, perchè stando l'area $ADNP$ come $AP \times PN$ (53.), starà ancora come $\overline{AP}^{\frac{2}{3}}$ (57.); ma la sottangente di questa Parabola è $\frac{1}{2} AP$ (21.); dunque l'area iperbolico-asintotica $ADNP = \frac{1}{2} AP \times PN$.

E S E M P I O VI.

91. Se la curva DN (Fig. 34.) è un' Iperbole tra gli asintoti, la di cui equazione sia $\overline{AP}^2 = \frac{1}{PN}$, la curva corrispondente MB farà un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti, perchè stando l'area $ADNP$ come $\frac{1}{AP}$ (55. 57.), e la sottangente di quest' Iperbole essendo $-\frac{1}{2} AP$ (23.), farà l'area iper-

iperbolica $ADNP = -AP \times PN$; qual segno negativo fa per altro conoscere, che lo spazio quadrato non è altrimenti $ADNP$, ma lo spazio PCN preso dalla parte opposta; ed in fatti l'area $ADNP$ all'area $ADnp$ non può mai stare come $PM:pm$, perchè starebbe il più al meno, come il meno al più; il che è assurdo.

E S E M P I O VII.

92. Sia l'equazione generale $AP = \overline{PN}^{\frac{n-1}{n}}$, intendendo per n un numero qualunque intero, o rotto, qual equazione comprenda nella curva DN (Fig. 33. 34.) tutte le Iperboli, e Iperboloidi tra gli asintoti; siccome la sua area sarà general-

mente come $AP \times PN$ (55.), cioè come $\overline{AP}^{\frac{n-1}{n}}$ (57.),

l'altra curva BM avrà l'equazione generale $\overline{AP}^{\frac{n-1}{n}} = \overline{PM}^{\frac{n}{n-1}}$, e perciò farà del genere delle Parabole, se n è un numero intero maggiore dell'unità, e farà del genere dell'Iperboli tra gli asintoti se n è un numero rotto minore dell'unità, per essere allora $n-1$ una quantità negativa.

Nel primo caso, posto cioè n per un numero intero, le sottangenti, che appartengono all'equazione $\overline{AP}^{\frac{n-1}{n}} = \overline{PM}^{\frac{n}{n-1}}$ (Fig. 33.) sono comprese nella formula $\frac{n}{n-1} AP$ (22.); sicche la quadratura dello spazio $ADNP$ farà generalmente $\frac{n}{n-1} AP \times PN$.

Nel

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 217

Nel secondo caso facciasi $n-1=-r$, l'equazione alla curva MB (*Fig. 34.*) diverrà $\overline{AP}^r = \overline{PM}^n$, ovvero $\overline{AP}^r = \overline{PM}^n$, e la sottangente PT farà generalmente $-\frac{n}{r} AP$ (26.); quindi la quadratura dell'altra curva DN farà $-\frac{n}{r} AP \times PN$, qual valore col segno negativo indica, che l'aree iperboliche quadrate non sono le ADNP, ma l'opposte PCN; ma $-\frac{n}{r} = -\frac{n}{r} = \frac{n}{n-1}$; dunque la quadratura dell'aree iperboliche PCN farà generalmente $\frac{n}{n-1} AP \times PN$.

Dal che riconoscesi, che la quadratura generale di tutte quante l'Iperboli, e Iperboloidi DN (*Fig. 33. 34.*) ora dall'una, ed ora dall'altra parte degli asintoti, è $\frac{n}{n-1} AP \times PN$; e se l'equazione generale di queste curve fosse $\overline{AP}^m = \overline{PN}^n$, la loro quadratura generale farebbe $\frac{m}{m-n} AP \times PN$. Così se $m=4, n=3$, la quadratura dello spazio ricercato farà $4 AP \times PN$, che per essere prodotto affermativo, denoterà l'area ADNP (*Fig. 33.*); se $m=3, n=5$, la detta quadratura farà $-\frac{1}{2} AP \times PN$, che per esser prodotto negativo, indica esser quadrata l'area opposta PCN (*Fig. 34.*); ma se $m=1, n=1$, la detta quadratura farà $\frac{1}{0} AP \times PN$; il che fa conoscere, non potersi ottenere la quadratura dell'area

E c ADNP

218 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 ADNP (Fig. 33.), per essere il denominatore inaffignabile
 rispetto al numeratore.

E S E M P I O VIII.

93. Se la Curva DNn (Fig. 33.) è la reciproca del semicerchio AFH, della quale si è parlato superiormente (62.); siccome questa ha l'area ADNP, ADnp proporzionali agli archi circolari corrispondenti AF, AI, la curva AM farà tale, che le sue semiordinate PM, pm faranno eguali agli archi circolari corrispondenti AF, AI, cioè farà un'ungula cilindrica appianata; ma in questa curva la sotttangente PT è (fatto p centro del cerchio) quarta proporzionale dopo il raggio, il seno retto, e l'arco corrispondente, cioè
$$= \frac{PF \times \text{Arc. AF}}{pF}$$
 (38.); dunque lo spazio curvilineo in questione ADNP
$$= \frac{PF \times PN \times \text{Arc. AF}}{pF}.$$

COROLLARIO.

94. Se $pn = pI$, e sia al solito p centro del cerchio, siccome vi deve esser l'analogia $pI : PF :: PN : pn$, farà PN
$$= \frac{pI \times pn}{PF} = \frac{pI^2}{PF};$$
 onde
$$\frac{PF \times PN \times \text{Arc. AF}}{pF} = pF \times \text{Arc. AF};$$
 vale a dire l'area ADNP farà in tal caso dupla del settore pAF, onde tutta l'area ADNH farà dupla del semicerchio AFH.

ESEM-

E S E M P I O IX.

95. Se la curva DNn (Fig. 33.) è la Versiera Grandiana (29.), l'altra curva AMB farà una cicloide ordinaria (64.65.), la di cui sottangente PT è quarta proporzionale dopo il seno retto, il seno verso, e l'applicata cicloidale cor-

rispondente, cioè $PT = \frac{PA \times PM}{PF}$ (42.43.); ma $PM =$

$PF + Arc. AF$; dunque farà $PT = \frac{AP \times PF + AP \times Arc. AF}{PF}$,

cioè quarta proporzionale dopo il seno retto, il seno verso, e la somma del seno retto, e dell'arco corrispondente; onde la quadratura dello spazio $ADNP$, cioè $PT \times PN$, farà

$\frac{AP \times PF \times PN + AP \times PN \times Arc. AF}{PF}$,

COROLLARIO.

96. Se le semiordinate PN fossero distribuite in maniera, che fatto p centro del cerchio AFH , la pn fosse eguale alla corrispondente pI , allora l'area $ADnp$ sarebbe doppia del settore AFH , perchè essendo in tal caso $Ap = pI$

$= pn$, l'addotta formula diverrebbe $\overline{Ap}^2 + Ap \times AF$; onde per le cose dette (63.) tutto lo spazio $ADNH$ farà con tal condizione doppio del semicerchio AFH .

E e 2

ESEM.

E S E M P I O X.

97. N. 1. Sia la curva AM (*Fig. 23.*) una Logistica; siccome le sue aree ADNM, AD nm stanno fra loro come le corrispondenti PM, pm (66.), ne verrà, che lo spazio ADNM eguaglierà il rettangolo della sotttangente PT nell'applicata NM; ma la sotttangente Nr della Logistica è una quantità costante (50.); dunque fatta questa = 1, farà per i triangoli simili TPM, NrM, la $PT = \frac{PM}{MN}$, onde l'area ADNM

= PM \times 1 = PM \times Nr, cioè farà eguale al rettangolo della sotttangente Nr nella differenza dell'applicate AD, MN, che tal' area ADNM racchiudono.

N. 2. Similmente siccome nella medesima Logistica AMB il suo spazio asintotico MBN stà come l'ordinata MN (66.), la sua quadratura farà eguale al rettangolo della sotttangente Nr nell'applicata MN, come già si disse (83.).

E S E M P I O XI.

98. Se la curva DN (*Fig. 24.*) è un' Iperbole Apolloniana, i di cui asintoti VC, CA, la curva AMB farà una Logistica ordinaria (67. 71.), onde la quadratura dello spazio iperbolico ADNP farà PT \times PN, cioè per essere SO:

SM(CP)::PM:PT = $\frac{CP \times PM'}{SO}$, la detta quadratura farà $\frac{CP \times PM \times PN}{SO}$, da cui ricavasi SO:PM::CP \times PN:ADNP, cioè

cioè lo spazio ADNP sarà quarto proporzionale dopo la sottangente della Logistica, la parallela al di lei affe, e il rettangolo inscritto nell'Iperbole; il che confronta con le cose già dette (79.).

COROLLARIO I.

99. Se tanto SO, che PM, si moltiplicheranno per SO, si avrà, alternando, l'analogia $\overline{SO}^2 : CP \times PN :: SO \times PM : NDAP$; ma la sottangente SO nella Logistica è costante (50.) e ogni rettangolo CPN inscritto nello spazio iperbolico è sempre dell'istessa quantità; dunque nel prodotto $SO \times PM$ si avrà sempre un rettangolo, che con lo spazio iperbolico NDAP sarà in un rapporto qualunque dato d'eguaglianza, o ineguaglianza, a tenore della relazione, che passa tra il quadrato della sottangente della Logistica, e il quadrato della potenza dell'Iperbole; cosicchè se la sottangente SO sarà eguale alla detta potenza, il prodotto $SO \times PM$ sarà sempre eguale al corrispondente spazio iperbolico NDAP; ed allora ogni applicata PM della Logistica AM starà allo spazio iperbolico ADNP, come nella Parabola Apolloniana l'ascissa al quadrato dell'applicata.

COROLLARIO II.

100. Giacchè la Logaritmica spirale è una Logistica ordinaria incurvata, è chiaro, che ancora in essa si verificherà, che la sottangente CF del primo raggio AC (Fig. 25.)
 sta

stà a qualunque arco circolare AQ , come il rettangolo DAC inscritto nell'Iperbole tra gli asintoti AC, CL , al trapezio iperbolico $APND$. Dal che deducesi generalmente, che lo spazio iperbolico $APND$, o il suo egual settore DCN , stà al corrispondente settore circolare ACQ , come la AD minima applicata di detto spazio iperbolico, alla metà della sotttangente CT ; imperciocchè fatta $AD = CT$, si avrà $AD : AQ :: DA \times AC : APND$; e moltiplicando i primi due termini per AC , avremo $DA \times AC : AQ \times AC :: DA \times AC : APND$, il che dimostra, che lo spazio iperbolico $APND$, o il suo egual settore DCN , farà doppio del settore circolare ACQ ; onde se si fosse fatta $AD = \frac{1}{2} CT$, il detto spazio iperbolico, o il suo egual settore pur iperbolico, farebbe stato eguale al detto settore circolare; dal che ricavasi $ADNP$, ovvero $DCN : ACQ :: AD : \frac{1}{2} CT$.

COROLLARIO III.

101. Dato dunque un cerchio, si può incassar facilmente la sua area in uno spazio iperbolico-asintotico, supposta cognita la sotttangente della logistica spirale, e la sua costruzione; imperciocchè ridotto il dato cerchio in un quadrante ACB , e presane una piccola parte aliquota nel settore ACQ , risolvasene tutta l'area in tanti settori al detto settore eguali, indi tagliati tutti i raggi in progressione geometrica continua ne' punti M, m, O , e presa la metà della massima sotttangente CT della logistica spirale, che passa per tali punti, si erga in perpendicolare dal punto A sulla AC , e tra gli asintoti AC ,
CL

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 223

CL descrivasi l' Iperbole Apolloniana DNr , che passi per il punto D ; indi preso il punto O dell'ultimo raggio CB , per cui passa la Logittica spirale, e dal centro C con l'intervallo CO descritto l'arco OR , tirisi all' Iperbole DNr l'applicata Rr ; è manifesto, che questa taglierà l'area iperbolica $ARrD$ eguale al settore circolare ACB , ed eguale in conseguenza al dato cerchio.

COROLLARIO IV.

102. Viceversa dato lo spazio iperbolico $ARrD$, si potrà, supposte l'istesse notizie, descrivere un cerchio ad esso eguale; imperciocchè dal centro C dell' Iperbole col raggio CA descritto il quadrante ACB , e diviso in eguali settori ACQ, QCq &c. i raggi de' quali vengano segati in progressione geometrica continua ne' punti M, m &c. prendasi la metà della massima sottangente CT della spirale logaritmica, che passa per i punti A, M, N, O , ed eretta verticalmente in A sulla CA , per la sua estremità F facciasi passare tra gl'istessi asintoti un'altra Iperbole FGH ; indi col raggio CO fisso in C descritto l'arco OR , dal punto R si conduca ad amendue l'iperboli l'applicata RrH ; avremo per le cose dette lo spazio $ARHF$ eguale al quadrante ACB , onde fatta l'analogia, come lo spazio iperbolico $ARHF$, allo spazio $ARrD$, cioè come la AF alla AD , così il quadrante ACB ad un altro cerchio, questo sarà il cerchio richiesto.

Co-

COROLLARIO V.

103. Dal che apertamente ravvisasi, che dalla determinazione della fottangente della Logistica spirale, e dalla sua definizione dipendono le quadrature dell' Iperbole, e del cerchio, che sono due delle più celebri Curve, che vanti la Geometria.

S C O L I O.

104. E' facile il conoscere, che la Logistica spirale nasce da un inarcamento della Logistica comune; imperciocchè sia AMO (*Fig. 36.*) una Logistica comune, uno de' di cui assi sia l' asintoto CD, l' altro la AB; questa vadasi incurvando intorno al centro C in una periferia circolare, mentre la CD si va tutta restringendo, e concentrando in esso punto C; ne seguirà, che tutte l' estremità dell' applicate dalla parte di CD, cioè i punti E, e &c. si riuniranno in C; che le EQ, *eq* &c. saranno tanti raggi di cerchio; e che la curva AMO si cangierà in un' altra, che intorno al centro C farà innumerabili ravvolgimenti, mentre la AB ripassa a incessanti doppi sopra la già formata ampiezza della periferia circolare, che ha per raggio la CA. Tale è la curva AMOC (*Fig. 25.*), in cui il detto cerchio è ABC (quantunque qui se ne noti soltanto il quadrante), che ha C per centro, la CT per fottangente relativamente al raggio AC, qual fottangente è l' istessa della Logistica, da cui la spirale trae l' origine; CA, CQ, Cq &c. sono i raggi, e CA,

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 225

CA, CM, Cm &c. i rami, che corrispondono all'applicate della Logistica comune.

PROPOSIZIONE VII.

105. Sia qualunque Curva AM (Fig. 37. 38.) il di cui asse TP; e da tutti i punti M, N presi nel suo perimetro tirate le Tangenti MT, Nt, che incontrino l'asse ne' punti T, t, compiscansi intorno ad esse, considerate come diametri, i parallelogrammi QNBt, PMbT, dimodoche per i punti B, b alla cima degli angoli esteriori di questi parallelogrammi passi la Curva BEb; dico, che lo spazio curvilineo AMNBb è eguale allo spazio curvilineo AMNQ.

Tirinsi alle PM, QN l'infinitamente prossime pm, qn terminanti ne' lati Mb, NB, e per i punti m, n passino le DO, do parallele all'asse TP, le quali pure faranno infinitamente prossime, e parallele alle Mb, NB. Siccome i rettangoli BN_o, NQq, bMO, MPp sono per la costruzione complementi di parallelogrammi intorno al diametro, farà BN_o = NQq; bMO = MPp, e perciò tutti i possibili rettangoli BN_o, bMO &c. faranno eguali a tutti i corrispondenti rettangoli NQq, MPp &c.; ma i primi non differiscono sensibilmente dall'area AMNBb (13.), e i secondi dall'area AMNQ; dunque l'area AMNBb farà eguale all'area AMNQ; il che &c.

COROLLARIO I.

106. E' facilmente conoscibile, che anche una qualunque porzione BNMb è eguale alla corrispondente porzione

Ff
cur-

226 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 curvilinea PMNQ. Il medesimo dicasi de' due intermedj spazj curvilinei EnMb, MngP.

COROLLARIO II.

107. Giacche tutte le BN, bM (Fig. 37.) riempienti l'area BbAMN sono eguali a tutte le sottangenti rQ, TP, &c.; se la curva AMN avrà per natura le dette sottangenti, sempre proporzionali all'ascisse AQ, AP, è chiaro, che tutta l'area BbAMN, ovvero l'area AMNQ starà all'area AMNC, come BN:CN, cioè come rQ:AQ; e componendo, si avrà l'area AMNQ:AQ \times QN::rQ:AQ+rQ.

COROLLARIO III.

108. Parimente supposta la medesima proprietà nella curva asintotica AMN. (Fig. 38.), cioè che siano sempre le sottangenti rQ, TP proporzionali all'ascisse, o distanze CQ, CP dal centro C, ne verrà, che starà una ad una, come tutte a tutte; vale a dire starà l'area AMNBb, o sia l'area AMNQT all'area AMNGCT, come BN:NG, o come rQ:QC; e dividendo, starà AMNQT:CQ \times QN::rQ:CQ-rQ; e componendo, sarà AMNGCT:CQ \times QN::CQ:CQ-rQ.

COROLLARIO IV.

109. Dal che raccogliesi generalmente 1.) Che in qualunque curva, che abbia le sottangenti proporzionali all'ascisse, l'arce

P ARTE SECONDA, CAPITOLO III. 227

l' aree stanno come il prodotto delle coordinate, cioè dell' ascisse nell' applicate ; 2.) Che in qualunque curva non asintotica (come mostra la Fig. 37.), che abbia parimente le sottangenti proporzionali all' ascisse, l' area curvilinea stà al rettangolo circoscritto, come la sottangente all' aggregato della sottangente, e dell' ascissa; cioè (fatto il rapporto della sottangente all' ascissa come $n:1$) come $n:n+1$, o come $\frac{n}{n+1}:1$; e in conseguenza la quadratura generale di tut-

te le Curve di tale specie sarà $\frac{n}{n+1} AQ \times QN$. 3.) Che in qualunque curva asintotica (come mostra la Fig. 38.) supposta la medesima condizione, l' area stà al rettangolo inscritto, come l' ascissa alla differenza dell' ascissa, e della sottangente ; cioè (fatto il rapporto dell' ascissa alla sottangente come $n:1$), l' area curvilinea all' inscritto rettangolo, stà come $n:n-1$; o come $\frac{n}{n-1}:1$; e in conseguenza la

quadratura di tutte le curve di tale specie sarà $\frac{n}{n-1} CQ \times QN$. 4.) Siccome poi tutte le curve, che hanno le sottangenti proporzionali all' ascisse, sono della famiglia delle Parabole, o Paraboloidi, Iperboli, o Iperboloidi tra gli asintoti all' infinito (22.26.), nelle quali pure le potenze dell' ordinate sono direttamente, o inversamente proporzionali all' ascisse; ne segue, che l' aree di tali curve stanno come i prodotti delle coordinate, come già si era stabilito (55.88.); e che la loro quadratura, trattandosi delle Parabole, è generalmente $\frac{n}{n+1} AQ \times QN$ (Fig. 37.), e trattandosi dell' I-

F f 2

perboli

perboli, è $\frac{n}{n-1} CQ \times QN$ (Fig. 38); il che si accorda con le cose poco anzi dimostrate (87.92.); avvertendo, che qui l'aree paraboliche son prese dalla parte concava della curva, quando n significa un numero intero, e dalla parte convessa, quando denota un rotto, tutto all' opposto di ciò, che si è detto riguardo alla formula $\frac{1}{n+1}$ (87.); quali formule, quantunque sembrino all' aspetto diverse, tuttavolta sono coincidenti, perche se farassi $n = \frac{1}{m}$, la formula $\frac{n}{n+1}$ diverrà $\frac{1}{m+1}$; e la formula $\frac{1}{n+1}$ diverrà $\frac{m}{m+1}$.

PROPOSIZIONE VIII.

110. Sia intorno all' asse TP (Fig. 39.40.) una curva qualunque AM, la di cui sostangente PT, e l' applicata PM; e da qualunque punto O preso nel suo perimetro tirate indefinitamente le OQ parallele all' asse, che seghino la detta applicata PM in R, facciasi primieramente la MN eguale alla sostangente PT, indi taglinsi le RQ eguali alle corrispondenti sostangenti tB, e così sempre; ovvero dal punto fisso P tirate tutte le possibili PQ, PN eguali, e parallele alle tangenti corrispondenti, Ot, MT, nel qual caso tutte le MN, RQ, parallele all' asse AP eguagliano le sostangenti corrispondenti PT, Bt; dico, che il natone spazio PQNM eguaglia la data figura AMP.

N. 1. Tirisi la pm infinitamente prossima alla PM, e dal punto m conducasì la mn parallela alla MN. Siccome
per

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 229

per la similitudine de' triangoli vi è l'analogia TP , ovvero $MN:PM::me:eM$, farà $MN \times eM = PM \times em = pm \times me$ (13.). Col medesimo raziocinio, tirata la bo infinitamente prossima alla BO , e la oq parallela alla OQ , si dimostrerà, essere $QR \times Rr = bo \times or$; e così sempre; onde tutta l'area $PMNQ$ farà eguale all'area intera AMP ; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Tirisi la Pm ; il parallelogrammo $MmnN$ farà sempre il doppio del triangolo MmP , e tutta in conseguenza l'area $NQPAM$ verrà ad esser doppia della data figura AMP ; sicche l'area $MNQP$ farà eguale all'area AMP ; il che &c., qual conseguenza si può anche dedurre dalla Proposizione precedente, giacche la somma delle sottangenti, poste l'una accanto all'altra per la medesima direzione forma sempre aree eguali, qualunque sia la configurazione, che può nascere da un tale aggregato.

COROLLARIO I.

III. Quando dunque si potrà dimostrare, che gli elementi formanti una figura piana qualunque siano eguali alla somma delle sottangenti, che corrispondono ad uno spazio curvilineo dato, questa figura dovrà essere eguale a tale spazio.

COROLLARIO II.

III. E' poi manifesto, che anche la porzione mistilinea *qner* eguaglia la porzione mistilinea *bomp*, come pure la por-

230 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

porzione mistilinea $PRQq$ eguaglia la porzione mistilinea AOB , e perciò l'area $MNOP$ è eguale all'area AMP tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti.

COROLLARIO III.

113. Si possono dunque formare due figure curvilinee eguali alla data area curvilinea, tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti; imperciocchè sia ABC (Fig. 41. 42.) la data area curvilinea, sul di cui ambito preso qualunque punto M , e prolungatene indefinitamente le coordinate AC , CB , e le PM , MR ad esse parallele, come nella figura, conduca la tangente TMr , che incontri le dette coordinate prolungate ne' punti T, r ; indi per il punto C facciasi passare la retta NCQ eguale, e parallela alla TMr , ma in maniera, che sia $CQ = TM$, e $CN = Mr$, e così sempre; i punti N, n da una parte, e Q, q dall'altra saranno ne' perimetri curvilinei CNn , CQq , i quali riguardo al tutto, e alle parti corrispondenti conterranno aree CnA , CqB , eguali ciascuna all'adiacente area curvilinea ABC ; ed in fatti tutte le PN saranno eguali a tutte le Rr , e tutte le RQ a tutte le PT .

DEFINIZIONE X.

114. Le figure $CNnA$, $CQqB$, ABC si possono chiamare con l'illustre Padre Grandi correlate (a).

Sco-

(a) Theorem. Hugonian. Cap. VIII. n. 5.

S C O L I O.

115. Avvertasi, che la curva QN (*Fig. 39.40.*) nasce egualmente, e dal porre sulla PM le perpendicolari MN, RQ eguali alle corrispondenti sottangenti TP, $\frac{1}{2}$ B, e dal situare le PN, PQ eguali, e parallele alle tangenti corrispondenti TM, $\frac{1}{2}$ o; sicche potendosi nella curva QN dimostrare o l'una, o l'altra di queste proprietà, ne verrà sempre, che lo spazio curvilineo PMNQ sarà eguale, sì riguardo al tutto, che alle parti, alla data figura AMP. Che se nelle *Figure 41. 42.* non fossero determinate le sottangenti, siccome si deve considerare la CN come eguale, e parallela alla tangente M $\frac{1}{2}$; per trovare le porzioni corrispondenti eguali in ambe l'aree curvilinee eguali CN $\frac{1}{2}$ A, ABC, condotta la NM parallela ad una coordinata CB, ergasi sovra essa dal punto M la normale MR, che incontri in R la detta CB, e che farà parallela all'altra coordinata AC, si avrà sempre l'area curvilinea CNP eguale all'area BRM, e così degli altri spazj. Questo avvertimento è utile nel venire alla misura particolare delle curve, come vedrassi ne' seguenti Esempj, da' quali pure ricaverassi, che si potrà scegliere l'una, o l'altra maniera, secondo che più netta, e più facile potrà rendersi la ricercata misura.

COROLLARIO IV.

116. Il medesimo metodo (110. N. 2.) si può adattare alle figure PDMA (*Fig. 43.44.*), pigliando il punto P all'e-

232 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

all'estremo della base, o in qualunque altro luogo della loro curvità, ed anche dentro alla figura, e tirando dal punto P la retta Po , che sempre parallela alle tangenti MT , tagli le MR , mr applicate alla base PA ne' punti e, o ; imperciocchè per il parallelogrammo Mmo sempre doppio del triangolo MmP , in qualunque luogo della curvità DMA si pigli il punto M , l'area $MANO$ sarà doppia del corrispondente trilineo PAM , onde tutta l'area $PDMANOoP$ sarà anch' essa doppia dell' area $PDMA$.

E S E M P I O I.

117. Se la curva AM (Fig. 42.) sia quella detta da i Geometri *Trattoria* (cioè sia la traccia, che un corpo in M legato ad un filo di grandezza costante MT , descrive, mentre vien tirato lungo la direzione PT), siccome la sua Tangente MT è costante, come dalla sua genesi apparisce, la sua figura correlata $CQqB$, è evidente, che sarà un quarto di cerchio, il di cui centro è il punto C , giacchè tutte le CQ parallele alle tangenti debbono esser sempre fra loro eguali; onde l'area BAC della *Trattoria* sarà eguale al quadrante circolare, che abbia per raggio la tangente di detta curva, e ciò tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti.

E S E M P I O II.

118. Se la curva AM (Fig. 40.) sarà una *Logistica*; siccome la sua sotttangente TP , ovvero TB è sempre l'intera (50.),

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 233

(50.), tutte le MN , RQ erette perpendicolarmente sulla PM faranno eguali, e perciò l'area $QNMP$ farà un rettangolo, che avrà per base l'applicata PM , e per altezza la sotttangente TP ; vale a dire, che l'area asintotica della Logistica eguaglia il doppio del triangolo rettangolo formato dall'applicata, dalla tangente, e dalla sotttangente; il che concorda con la già data misura (97. N. 2.).

E S E M P I O III.

119. Se la curva AMB (Fig. 45.) farà una femicicloide ordinaria, a cui sia circoscritto il rettangolo $ACBD$, le sue tangenti MT , mt faranno eguali, e parallele alle corde AN , An del suo semicerchio genitore AND (42. 43.), onde se dal punto C si tireranno le CQ , Cq eguali, e parallele alle corde AN , An , ne nascerà il semicerchio CQB eguale sì al semicerchio genitore AND , che al trilineo cicloideale $AMBC$; dal che deducesi, che essendo per la natura della cicloide, e per Archimede il rettangolo $ACBD$ quadruplo del semicerchio AND , lo spazio femicicloideale $AMBD$ farà triplo del suo semicerchio genitore AND ; e la porzione circolare CQE , ovvero Cqe , farà per lo Scolio novissimo (115.) eguale al trilineo AMH , ovvero Amb ,alzata la MH , ovvero la mb perpendicolare alla CA . In oltre il segmento circolare contenuto dall'arco CQq , e dalla sua corda Cq eguaglia il trilineo corrispondente mtA , compreso dalla tangente mt , dalla porzione tA dell'applicata AC , e dalla curva cicloideale AMm . Di più se dal parallelogrammo $Asmm$, che è doppio del triangolo Asm , si toglieranno

G g

i due

i due segmenti, l'uno circolare compreso dall'arco An , e dalla sua corda, l'altro cicloidale compreso dalle tangenti Ar , rm , e dall'arco AMm , ne rimarrà il segmento, o trilineo cicloidale concavo $mMANn$ contenuto dall'arco cicloidale AMm , dall'arco circolare ANn , e dall'applicata mn , che farà doppio del segmento cicloidale AMm ; onde per il medesimo discorso, anche la zona MNm farà doppia del settore cicloidale MAM compreso dall'arco Mm , e dalle corde AM , Am &c.

E S E M P I O IV.

120. La curva AMB (Fig. 46.) sia la Cissoide di Diocle, che abbia con la femicicloide CQD comune il semicerchio genitore ANC ; tirata ad essa Cissoide qualunque corda AM , ed ordinata la MQ comune alle tre nominate figure, come ancora condotta l'applicata QE alla femicicloide, e congiunte le CN, NA , essendovi per la natura della Cissoide l'analogia $NR:RA::RA:RM$, l'angolo NAM sarà retto; onde per la similitudine de' triangoli CNR , RAM , la AM sarà parallela alla CN , e in conseguenza sarà parallela, ed eguale alla tangente cicloidale QT ; il che verificandosi in tutte le corde Am riguardo a tutte le tangenti rq , ne segue (113. 115.), che tutta l'area asintotica cissoidale $AMmBC$ sarà, tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti, eguale alla femicicloide $ADQqC$, dimodoché lo spazio AMR eguaglierà lo spazio QDE , e lo spazio $RMmr$ eguaglierà lo spazio corrispondente QEq .

Co-

COROLLARIO I.

121. Se alla Cissoide AMBC aggiungasi il semicerchio ANC, tutta la figura ANCB^mM farà quadrupla del detto semicerchio, e in conseguenza la porzione AFNRM farà quadrupla del segmento circolare corrispondente compreso dall'arco AN, e dalla sua corda.

COROLLARIO II.

122. Per esser tutta la Cissoide ACB^mM tripla del semicerchio genitore ANC (per l'esempio antecedente), anche il settore cissoidale CAM compreso dal diametro CA, dal ramo CM, e dall'arco AM, farà triplo del già nominato segmento contenuto dall'arco circolare NA, e dalla sua corda.

COROLLARIO III.

123. Quindi il tetragonismo d'un segmento cicloidale detratto da un segmento circolare; imperciocchè stando AFNRM : CAM :: 4 : 3; ed essendosi dimostrato lo spazio cissoidale ARM eguale al segmento cicloidale DQE, farà $4CRM + 4QDE = 3AFNA + 3NRA + 3QDE$; ovvero $NRA = 3AFNA - QDE$, per essere il triangolo CRM eguale al triangolo NRA. Ed in fatti pigliando i segmenti totali, se dal triplo dell'area del semicerchio CNA tolgasi l'area della semicicloide CQDA, il residuo sarà eguale a zero, come

G g 2 deve.

deve essere, perchè la detta area semicicloidale eguaglia, come si è dimostrato (119.), il triplo di detta area circolare.

E S E M P I O V.

124. Sia la curva AIFC (Fig. 47.) la spirale d' Archimede. Eretta normalmente a qualunque suo raggio AC, ovvero aC , la sotttangente CT, ovvero Ct , la prima delle quali farà eguale alla periferia circolare, che ha per raggio la CA, e la seconda alla periferia aGP , che ha per raggio la aC (32.), e da' punti T, t condotte le Tangenti TA, ta , tirinsi le CI, ci infinitamente prossime alle CA, Ca , e compiscansi i parallelogrammi, come nella figura. Giacche i triangoli CIA, Cia non differiscono sensibilmente da un settore di spirale (13.), e sono la metà de' rettangoli AH, ab , faranno ancora la metà de' rettangoli RD, rd , che co' detti rettangoli sono complementi intorno a' diametri AT, at ; onde i due settori CIA, Cia faranno la metà del prodotto delle loro sotttangenti CT, Ct nelle AR, ar , e così da per tutto; dunque dall' estremità A del raggio CA, e dal punto P della $CP = aC$ abbassate le perpendicolari AN = CT, e PM = Ct , e così sempre, si verrà a formare l'area curvilinea ACMN, che farà il doppio dell' area della spirale, tanto relativamente al tutto, che alle parti corrispondenti; ma si è dimostrato, che le sotttangenti della spirale stanno come i quadrati de' loro raggi (33.), e però $PM = \overline{CP}^2$; dunque essendo ACMN uno spazio parabolico esteriore (22.), la di cui quadratura è $\frac{1}{3}$ AN \times AC (85.), ovvero

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 237

vero due terzi d' un triangolo, che ha per altezza il raggio AC, e per base la di lui periferia ALM, l' aree della spirale in questione saranno eguali alla terza parte de' settori circolari, che le circoscrivono; e però lo spazio *aibC* farà la terza parte del settore *aGP*, come l' area intera *AFabC*. è la terza parte dell' intero cerchio ALM.

COROLLARIO.

125. Di qualunque grado sia l' Elice *AFabC*, si è dimostrato, che la sua sottangente stà generalmente al raggio,

come $PM : \overline{CP}^{\frac{m+n}{m}} (36.)$; onde l'equazione generale alla curva

CMN farà $\overline{PM}^m = \overline{CP}^{m+n}$, qual' equazione è alle Parabole di tutti gli ordini all' infinito, e però l' area Parabolica esteriore ACMN stà al rettangolo circoscritto, come

$\frac{m}{2m+n} : 1. (88.)$; ma l' area di qualunque spirale stà (come

dalla fatta di nstrazione può ricavarfi) al settore circolare circoscritto, come l' area Parabolica ACMN al circoscritto rettangolo; dunque anche l' area d' una spirale di qualunque grado stà al settore circoscritto, come $\frac{m}{2m+n} : 1$. Così posta

l' equazione generale alle spirali $\overline{AC}^n \times \overline{AF}^m = R^m \times \overline{CF}^n$, se facciasi $m=1, n=1$, il detto rapporto farà come $\frac{1}{2} : 1$;

cioè sarà un terzo del settore circoscritto appunto come si è dimostrato. Se $m=2, n=3$, lo spazio della spirale farà $\frac{2}{7}$ del settore circoscritto &c.

ESEM.

E S E M P I O VI.

126. Sia PBFA (Fig. 48.) una Logistica spirale; siccome gli angoli APT , ABr formati da' suoi raggi AP , AB , e dalle rispettive tangenti PT , Br , sono sempre eguali (51.), e però simili sono i triangoli rettangoli APT , ABr , faranno le sottangenti AT , Ar senipre proporzionali a' raggi AP , AB ; onde eretta dal punto P la normale PV eguale alla massima sottangente AT , e giunta la AV ; indi presa sulla AP la $AD=AB$, e tirata alla PV la parallela DE , che egualgerà la Ar , si avrà per un raziocinio simile a quello dell' Esemplio antecedente, il triangolo APV , tanto in tutto, che in parte, doppio dell' area della detta Logistica spirale; e però l' area $PVED$ farà doppia dell' area PBA , come pure l' area DAE dell' area BFA .

PROPOSIZIONE IX.

127. Sia qualunque curva MN (Fig. 49. 50. 51.), e sul suo perimetro, o al di dentro, o al di fuori di esso prendasi un punto C , in cui concorrano ad angolo retto le due rette CA , CT , una delle quali, cioè CA , serva d' asse, su cui siano applicate normalmente le PM , QN ; indi a' punti M , N , si tirino le tangenti MT , Nt , che dalla CT taglino le CT , Ct ; prolungate poscia le MP , NQ , facciasi $PS=CT$, $QO=Ct$, e così sempre in maniera, che queste PS , QO tocchino con la loro estremità la curva OS ; dico, che lo spazio $PSOQ$ intercetto dall' applicate prolungate PS , QO , dall' asse PQ ,

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 239

PQ, e dalla curva SO, è doppio del corrispondente trilineo CMN compreso dalla prima curva MN, e dalle rette CM, CN condotte dal preso punto C a' detti punti M, N.

N. 1. Tirisi alla MS l'infinitamente prossima equidistante ms , e dal punto C condotta sulla tangente MT la normale CB, dal punto M si cali sulla ms la normale Mo . Essendo mo parallela a CT, e sopra di esse cadendo la MmT , gli angoli in m, T faranno eguali, onde simili faranno i triangoli Mmo , TCB ; il che dà l'analogia $Mm:Mo (Pp) :: CT (PS):CB$; sicche $Mm \times CB = Pp \times PS$, cioè l'areola elementare PSp eguaglierà il doppio del triangolo MCm , la di cui altezza è CB. Dunque la somma di tutte l'areole elementari PSp , vale a dire tutta l'area $PSOQ$ eguaglierà il doppio della somma di tutti i triangoli elementari MCm , cioè il doppio del corrispondente trilineo CMN; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Condotta dal punto C la CF parallela alla tangente TM, che incontri ne' punti F, H le PM, pm prolungate dove bisogna, tirisi la FI parallela alla Mo ; il parallelogrammo $FHmM$ eguaglia il rettangolo $FIoM$ eguale per la costruzione all'area elementare PSp ; ma il parallelogrammo $FHmM$ è doppio del triangolo MCm ; dunque ancor l'area elementare PSp sarà doppia di detto triangolo MCm , e però l'area $PSOQ$ sarà doppia del trilineo CMN; il che &c.

Co-

COROLLARIO I.

128. Se tutte le PS, QO faranno la metà delle CT, Ct, l'area PSOQ farà eguale al trilineo MCN, e così delle altre aree corrispondenti; onde data una figura curvilinea, se ne può costruire un'altra, che sia ad essa in una data ragione.

COROLLARIO II.

129. Se il punto C farà preso sul vertice d'una curva MN divergente (*Fig. 49.*), l'area costrutta ACOV non farà asintotica; ma se la detta curva MN farà ritornante in se stessa (*Fig. 22.*), o se esso punto C farà preso dalla parte della base di detta curva (*Fig. 50.*) o se dalla parte del vertice, ma in distanza (*Fig. 51.*), è manifesto, che l'area da costruirsi nella maniera prescritta deve essere asintotica.

COROLLARIO III.

130. Per ottenere il valore delle CT, Ct, e in conseguenza l'equazione alla Curva OS, prolungata la tangente Nr finche incontri nel punto E l'asse AC, esteso anch'esso, se bisogna, facciasi l'analogia EQ:QN::EC:Ct; farà $Ct = \frac{EC \times QN}{EQ}$; onde sostituiti i valori in termini dell'ascissa, ne proverrà l'equazione desiderata; il che può talvolta ottenersi anche con altri più facili compensi, come vedrassi negli Esempi consecutivi,

ESEM.

E S E M P I O I.

131. Sia CM (Fig. 49.) una Parabola di qualunque genere compreso nell'equazione $CP = \overline{PM}^n$, ed il punto C sia preso nel suo perimetro; siccome le sottangenti sono in tal caso proporzionali all' ascisse (22.), avremo $Cr = \left(\frac{n-1}{n}\right) QN$; presa dunque la $QO = \frac{1}{2}CT = \left(\frac{n-1}{2n}\right) QN$, e così sempre, ne nascerà la curva COV, che avrà l' aree COQ, CSP eguali a' segmenti Parabolici corrispondenti CN, CNM. Tal curva poi farà nuovamente una Parabola della specie della Parabola CNM, perchè essendo tanto la QO, che la PS porzioni simili dell' applicate QN, PM, il loro quadrato farà sempre proporzionale all' ascisse CQ, CP; onde la quadratura dello spazio COVA, cioè $\left(\frac{n}{n+1}\right) CA \propto AV$ (87.), ovvero $\left(\frac{n-1}{2n+2}\right) CA \propto AD$ eguaglierà il corrispondente segmento Parabolico CNMD. Sicche se $n = 2$, il detto segmento farà $\frac{1}{6}CA \propto AD$; ed in fatti dall' area AMDA togliendo il triangolo DAC, cioè da $\frac{2}{3}$ togliendosi $\frac{1}{6}$ il residuo farà $\frac{1}{2}$.

H h

ESEM.

E S E M P I O II.

132. Rappresenti AM (Fig. 50.) una dell' infinite Parabole comprese nell' equazione generale $AP = \overline{PM}^n$, ed il punto C sia preso interiormente al perimetro curvilineo; per essere la $EC = EA + AC$, farà la $Cx = \left(\frac{EA + AC}{EQ}\right) \times QN = QO$, cioè fatto $AC = 1$, e sostituiti i valori, farà $QO = \left(\frac{n-1}{n}\right) \overline{AQ}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \overline{AQ}^{\frac{1}{n}-1}$; qual' equazione include infinite curve quadrabili, giacche la loro area AVSP è doppia dell' area Parabolica CMA; ovvero col crescere, o diminuire quanto bisogna tutte le QO, farà all' area CMA in una data ragione. In simil guisa procedasi quando il punto C fosse preso all' esteriore di detta Curva AM, come nella Fig. 51.

E S E M P I O III.

133. Sia AMD (Fig. 52.) un quadrante di cerchio, ovvero sia ANE un quadrante d' Ellisse, che abbiano comuni l' asse AC, e la semiordinata PM, e da' punti M, N conducansi le tangenti MT, Nt ad incontrare in T, e le CD, CE, prolungate; siccome queste CT, Ct sono reciproche ciascuna a ciascuna, delle rispettive semiordinate PM, PN, ne verrà, che costruendo con esse, gli spazj asintotici AVSO, AVQR

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 243

AVQR nel modo prescritto, questi avranno le semiordinate PS, PQ, reciproche ciascuna a ciascuna delle corrispondenti semiordinate PM, PN, onde facile farà la costruzione, e la cognizione delle Curve SO, QR, l' aree delle quali siano tanto ai settori corrispondenti del cerchio, che dell' Ellisse in una data ragione; e intanto osservisi, che ciò confronta con quello, che si è poco anzi dimostrato (93.94.).

COROLLARIO I.

134. Giacche il settore circolare AMC stà all' Ellittico ANC, come DC:CE (*P.I. 73.*), anche l'area AVSO stà all' area AVQR, come CO:CR per la costruzione, e l' area AVSP all' area AVQP in conseguenza, come PS:PQ, ovvero come CO:CR, purchè le costruzioni siano fatte a dovere.

COROLLARIO II.

135. Non solo l' area AVSP, stando come il settore ACM, farà proporzionale all' arco AM, quanto ancora l' area AVQP, stando come il settore Ellittico ACN, farà ad esso arco AM proporzionale; perchè essendo il detto settore Ellittico ACN per le Sezioni Coniche quarto proporzionale dopo il maggiore, il minor asse, e il settore AMC, ed essendo i semiaffi AC, CE costanti, il settore Ellittico ACN farà proporzionale tanto al settore circolare ACM, che all' arco AM, e in conseguenza anche l' area AVQP farà ad esso arco AM proporzionale.

Hh 2

Sco-

S C O L I O.

136. Per dimostrare, che la CT è reciproca alla PM, come pure la Cr alla PN, sia ADC (*Fig. 53.*) un quadrante di cerchio, e AEC un quadrante d'Ellittè, che abbiano C per centro comune, e preso nella periferia circolare un punto M, guidisi da esso la tangente MT ad incontrare in T il raggio CD prolungato; indi ordinata la MP, tirisi la MG parallela all'asse AC, e giungasi MC. Similmente tirata al punto N preso nel perimeiro Ellittico la tangente Ns, che vada a ferire nel punto s l'esteso semiasse CE, ed ordinata la NQ, conducasi la NI parallela all'altro semiasse AC.

Per esser nel quadrante circolare ADC retto l'angolo

$$TMC, \text{ farà } TC:CM::CM:CG, \text{ onde } TC = \frac{CM^2}{CG} = \frac{CM^2}{PM};$$

ed è CM costante; dunque CT è reciproca all'applicata PM. Nel quadrante Ellittico AEC, è noto per le Serie

Coniche, essere $CI:CE::CE:Cr$, onde farà

cioè per esser la CE costante, la Cr sarà reciproca all'applicata QN.

E S E M P I O IV.

137. Sia la curva AMC (*Fig. 22.*) un semicerchio, o una semiellissè, nel di cui vertice sia preso il punto C; e
da

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 245

qualunque punto N tirate la tangente Nt , e la secante ANH, che incontrino ne' punti t , H la CH normale in C alla AG; è noto per le Sezioni Coniche che la CH sarà divisa per mezzo in t . Presa dunque la QO doppia della Cr, e così sempre, si costruirà la Curva AVOC, il di cui
 o AV, la quale sarà quadrupla de' corrispondenti seg-
 Ellittici, o circolari. Quindi per trovar la na-
 della costrutta figura, osservisi, che vi è l' analo-
 gia $\overline{AQ}^2 : \overline{QN}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{CH}^2$; ma nel cerchio è $\overline{AQ}^2 : \overline{QN}^2 :: AQ$
 $: QC$; dunque $AQ : QC :: \overline{AC}^2 : \overline{CH}^2 = \overline{QO}^2 = \overline{AC}^2 \times \frac{QC}{AQ}$; sic-
 che stando \overline{QO}^2 come $\frac{QC}{AQ}$ per essere AC costante, ovvero QO
 come $\frac{QN}{QC}$, vedesi, che quella Curva è la Versiera Grandiana,
 di cui si è parlato (29.95.), dimodoche se fosse $QO =$
 Cr , l'area AVOC, tanto in parte, che in tutto, sarebbe
 doppia del semicerchio AMC, come con altro metodo si è
 stabilito (96.).

E S E M P I O V.

138. Sia AM (Fig. 54.) un' Iperbole equilatera, il di
 cui asse trasverso AC. Tirata al vertice A la tangente AG,
 che incontri in G la MC, la AG sarà per le Sezioni Co-
 niche doppia della AI recisa dalla tangente MT; onde per
 i triangoli simili CAG, CPM avremo $\overline{CP}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{AG}^2$;
 ma per la natura dell' Iperbole $\overline{CP}^2 : \overline{PM}^2 :: CP : AP$;
 dun-

dunque $CP:AP::\overline{CA}^3:\overline{AG}^3=\overline{CA}^3\times\frac{AP}{CP}$; sicche fatta la PS
dupla della AI, e così sempre, l'equazione alla natane cur-
va AS, che avrà l'area quadrupla del segmento Iperbolico
AMA, farà $\overline{PS}^2=\overline{CA}^2\times\frac{AP}{CP}$, e che col P. Rollo (a) potrà
chiamarsi *Verfiera Iperbolica*, la di cui costruzione è simile
a quella della Verfiera Grandiana (29.137.), stando \overline{PS}^2 co-
me $\frac{AP}{PC}$ a causa della costante AC.

E S E M P I O VI.

139. Sia AM nuovamente un' Iperbole equilatera, il
di cui asse trasverso AC. Dal vertice A fatta passare una ret-
ta qualunque MAH, che tagli la curva nel punto M, e
la CH (perpendicolare in C al detto asse) nel punto H;
indi tirata al punto M la tangente MT, se alla CH si fa-
rà eguale la PK, e così sempre, l'area PKVA farà quadru-
pla del settore Iperbolico esteriore CAM, giacche per le Se-
zioni Coniche la CH è tagliata per mezzo in T dalla tan-
gente MT; dal che ricavasi facilmente il valore della PK,
perche essendo $\overline{AP}^2:\overline{PM}^2::AP:PC::\overline{AC}^2:\overline{CH}^2$, farà \overline{CH}^2 , ov-
vero $\overline{PK}^2=\overline{AC}^2\times\frac{PC}{AP}$; sicche per essere AC costante, sta-
rà

(a) De corporum motu rectilineo & | curvilineo Lib. I. § 67.

rà \overline{PK} come $\frac{PC}{AP}$, il che forma il carattere d' un' altra Verifera Iperbolica reciproca a quella dell' Esempio precedente.

PROPOSIZIONE X.

140. *Essendo nota la natura d'una data curva, trovar la natura, la costruzione, e la quadratura d'un'altra curva, le di cui aree intorno all' asse comune siano proporzionali all' applicate tanto interiori, che esteriori della curva data.*

Sia AM (Fig. 24. 29. 30. 31. 32. 33.) la data curva, la di cui sottangente RQ (Fig. 24. 29. 30.), ovvero PT (Fig. 31. 32. 33.); giacche l' area ADNP della curva DN, che richiedesi, e che deve avere con la curva AM comune l' asse AP, si è dimostrata eguale a $TP \times PN$ (78.), starà per l' ipotesi $PN \times TP$ come PM; cioè supponendo PM moltiplicato in una conveniente quantità costante fatta $= 1$, si avrà l' equazione $PN \times TP = PM$, e però $PN = \frac{PM}{TP}$ (Fig.

31. 32. 33.); ovvero $PN = \frac{RQ}{QM}$ (Fig. 24. 29. 30.), essendo

$TP:PM::QM:RQ$; vale a dire eguaglierà nel primo caso l' applicata divisa per la sottangente, e nel secondo la sottangente divisa per l' applicata. Sostituirti dunque all' applicata, e alla sottangente i valori in termini di AP, si verrà con l' equazione, che ne risulta, a determinare la natura della richiesta curva DN, di cui si può avere nel tempo istesso
la

la costruzione, e, per le cose dette (78.80.) la quadratura, il che &c.

E S E M P I O I.

141. Sia *AM* (*Fig. 30.*) una Parabola cubica, in cui $AQ = \overline{QM}^3$; siccome in questa la sotttangente $RQ = 3AQ$ (19.) $= 3\overline{QM}^3$; farà $RQ = 3\overline{QM}^2$; onde si avrà l'equazione $PN = 3\overline{QM}^2 = 3\overline{AP}^2$, il che dimostra una Parabola quadratica rivolgente la *AP* (22.), la quadratura del di cui si è in conseguenza $\frac{1}{3}AP \times PN$ (81.).

E S E M P I O II.

142. Sia la curva *AM* (*Fig. 30.*) una dell'infinite Parabole, o Paraboloidi comprese nell'equazione $\overline{AQ}^n = \overline{QM}^m$, in cui il numero *n* sia minore del numero *m*, farà la sotttangente $RQ = \frac{m}{n}AQ$ (22.) $= \frac{m}{n}\overline{QM}^{\frac{m}{n}}$; onde essendo $\frac{RQ}{QM} = \frac{m}{n}\overline{QM}^{\frac{m}{n}-1}$, l'equazione alla curva richiesta farà $\overline{PN}^n = \frac{m}{n}\overline{QM}^{m-n}$; ovvero $\overline{PN}^n = \overline{AP}^{m-n}$ il che dimostra, che anc'

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 249

anche la curva ricercata farà in tal caso del genere delle Parabole, con questa circostanza, che quando $n=1$, ed m significano un numero intero, la prima Parabola AM è sempre d'un ordine superiore alla seconda AN, la di cui quadratura è generalmente

$$\frac{AQ \times QM \times PN}{RQ} (80.) = \frac{n}{m} AP \times PN.$$

Sicche se $n=1$, $m=3$, cioè se la curva AM farà una Parabola cubica, la curva DN farà una Parabola quadratica, la di cui quadratura, come nell' antecedente Esempio si è veduto, farà $\frac{1}{3} AP \times PN$. Ma: se $n=1$, $m=2$, l' equazione alla curva AN diverrà $PN=2AP$; cioè la AN si cangerà in una retta, e la figura ANP farà un triangolo rettangolo, in cui AP è il doppio della PN, onde si avverrà, che il suo spazio sia $\frac{1}{2} AP \times PN$.

S C O L I O .

143. Notifi, che quando $\frac{n}{m} AP \times PN$ denota più della metà del rettangolo APN, come se fosse $n=2$, $m=3$, allora la curva Parabolica AN non rivolta più la curvità, ma la concavità all' asse, come nella Fig. 29.

E S E M P I O III.

144. Sia AM (Fig. 33.) una Parabola compresa nell' equazione generale $\overline{AP}^m = \overline{PM}^n$, ma sia posta diversamente dalle figure antecedenti, cioè rivolta con la sua concavità all' as-

I i

se

se AP comune con quello della curva DN, che ricercasi: siccome è la sottangente $PT = \frac{n}{m} AP$ (22.), l'equazione alla curva DN, che è $PN = \frac{PM}{PT}$, farà, sostituendo i valori, $PN = \frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$, ovvero $\overline{PN}^n = \overline{AP}^{m-n}$, e la sua quadratura, che è $PT \times PN$ (78.), farà $\frac{n}{m} AP \times PN$. Così se $m=2, n=3$, l'equazione alla curva DN farà $PN = \frac{2}{3} \overline{AP}^{-\frac{1}{3}}$, la di cui quadratura $AP \times PN$ concorda con la misura, che ricavasi dalle già date formule generali (92.109.).

S C O L I O.

145. E qui ancora osservisi 1.) che m deve esser sempre minore di n , acciò la curva AM volti sempre all' asse AP comune con quello della curva DN la concavità (22.), onde dovendo esser sempre la quantità $m-n$ un numero negativo, vedesi, che la curva DN farà sempre del genere dell' Iperboli tra gli asintoti. 2.) Che se si facesse $m=n$, la curva AM si trasformerebbe in una retta, e l'area AMP in un triangolo rettangolo equicrura, confondendosi la AT con la AM; ed allora la PN sarebbe costante; infatti dovendo la PM stare come la AP, anche lo spazio ADNP dovrà stare come la AP^2 , il che dimostra, che tali spazj faranno tanti rettangoli della medesima altezza PN, e perciò la curva DN dovrà cangiarsi in una retta parallela alla AP, e farà vero, che sia lo spazio $ADNP = AP \times PN$.

ESEM-

E S E M P I O IV.

146. Sia la curva AM (Fig. 31.) una dell' infinite Iperboli tra gli asintoti comprese nell' equazione $\overline{CP}^m = \overline{PM}^n$; per essere la sottrangente $PT = -\frac{n}{m} CP$ (26.), l' equazione alla curva DN, che è $PN = \frac{PM}{PT}$, sostituendo gli equivalenti, farà $PN = -\frac{m}{n} \overline{CP}^{\frac{-m-n}{n}}$, ovvero $\overline{PN}^n = -\overline{CP}^{m-n}$; il che dimostra, essere anche la curva DN del genere dell' Iperboli tra gli asintoti, la di cui quadratura è in generale $TP \times PN = \frac{n}{m} CP \times PN$, qual valore essendo accompagnato col segno negativo, fa conoscere, che l' area quadrata non è dalla parte dell' asse PC, vale a dire non è l' area CVNP, ma dalla parte opposta, cioè NDP, il che è verissimo, perche l' aree VCpn, VCPN non possono, senza involgere assurdo, stare come le pm, PM. Così se $m=1, n=1$, l' equazione all' Iperbole DN farà $PN = \overline{CP}^2$, l' area NDP farà $CP \times PN$, ed allora la curva AM farà un' Iperbole Apolloniana, perche la CP deve esser reciproca alla PM.

S C O L I O.

147. Qui parimente notifi, 1.) che l' aree dell' Iperboli tra gli asintoti non son quadrabili, se non da quella parte, dove le potenze dell' applicate sono minori di quelle dell' as-
I i 2
scisse,

scisse, eccetto gli spazj dell' Iperbole comune, niuno dei quali è quadrabile. 2.) che quest' aree iperboliche non quadrabili sono state credute un più che infinito dal Wallis ^(a); e il Padre Grandi ^(b) ha preteso dimostrare, che ciascuna di quest' aree sia infinitamente maggiore d' un' altra pure infinita di grado prossimamente inferiore, e ciò all' infinito; ma il Varignon ^(c), e il Leibnizio ^(d) col confutare l' opinione del Wallis hanno gettato a terra queste stravaganze, quantunque Uomini grandi siano stati i due nominati, che l' avevano adottate. Su tal proposito preso il solito linguaggio de' Geometri, io dirò di passaggio, che considerata ex. gr.

l' Iperbole cubica tra gli asintoti, in cui $\overline{PN}^2 = AP$ (Fig. 33.), per esser l' area $ADNP = 2 AP \times PN$, se l' ascissa AP diverrà infinita, nel qual caso l' applicata PN. diventa zero, tutta l' area ADNHA farà $2 \times \infty \times 0 = 2$, a causa dell' analogia $0:1::1:\infty$; il che darebbe a conoscere, che l' area PNH non è per lo meno un infinito d' infinito, giacche può esprimersi con un numero finito; e così degli altri casi, ne quali lussureggiano gl' infiniti di ordini superiori.

E S E M P I O V.

148. Sia AF (Fig. 33.) una curva qualunque, e l' altra curva AMB sia tale, che la FM sia sempre eguale all' arco corri-

- | | |
|---|--|
| <p>(a) <i>Arithm. infinit. Scol. Prop. 101. fol. 407. & Prop. 104. fol. 409.</i></p> <p>(b) <i>De infinitis infinitorum, & infinite parvorum ordinibus.</i></p> | <p>(c) <i>Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences. an. 1706.</i></p> <p>(d) <i>Act. Eruditor. an. 1712. pag. 167. seq.</i></p> |
|---|--|

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 253

corrispondente FA, è noto per le cose dette (41. N. 2.),

esser la sottangente $PT = \frac{MP \times PG}{GF + PF}$; onde l'equazione gene-

rale alla curva DN sarà $PN = \frac{PM}{PT} = \frac{PF + GF}{PG} = \frac{pF + tF}{PF}$,

se si suppone, che Pp sia la funnormale della curva AF (e qui le PM, pm non si considerano come infinitamente prossime; il che pure si è fatto altrove, e si seguiterà a fare all'occorrenza per non moltiplicar le figure); sicche la quadratura dello spazio ADNP, cioè $PT \times PN$ sarà $PM = (PF + Arc. FA) \times 1$; eguale cioè al prodotto della somma dell'applicata PF, e dell'arco FA in una quantità costante, cioè in quella quantità costante, che si vuol moltiplicare nella formula $\frac{PF + GF}{PG}$, per assegnare maggiore, o minor lun-

ghezza alla PN nella costruzione della curva DN. Data dunque la natura della curva AF, si può, quando si voglia, con le sole sue ascisse, ed applicate costruire la curva DN, sostituendo alle GF, PG, cioè alla tangente, e sottangente, i valori in termini di AP, PF.

COROLLARIO I.

149. Quindi se la AF sarà un cerchio, il di cui centro p , siccome per la sua natura abbiamo $\overline{PF}^2 = (pF + Pp) \times PA$, si avrà $AP:PF::PF:pF + Pp::PG:GF + PF$; onde $PN = \frac{GF + PF}{PG} = \frac{PF}{AP}$; qual'equazione è alla Versiera

Gran-

254. *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 Grandiana, la di cui area ADNP è proporzionale alla corrispondente semiordinata PM della femicloide AM, appunto come superiormente si era stabilito (64.).

COROLLARIO II.

150. Se AF farà una Parabola di qualunque genere compresa nell'equazione $\overline{AP}^m = \overline{PF}^n$, farà la sottangente PG $= \frac{n}{m} \overline{AP}$ (22.), e la GF $= \frac{1}{m} \sqrt{\left(n^2 \overline{AP}^2 + m^2 \overline{AP}^{\frac{2m}{n}} \right)}$; onde $\overline{PN} = \frac{GF + PF}{PG} = m \sqrt{\overline{AP}} + \sqrt{\left(n^2 \overline{AP}^2 + m^2 \overline{AP}^{\frac{2m}{n}} \right)}$; sicche se $m=1, n=2$, farà $\overline{PN} = \sqrt{\overline{AP}} + \sqrt{(4\overline{AP}^2 + \overline{AP})}$, ovvero $\overline{PN} = \frac{PF + \sqrt{(\overline{PF}^2 + \overline{PF}^3)}}{\overline{PF}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{AP}}} + \sqrt{\left(\frac{1}{\overline{AP}} + \overline{AP} \right)}$, quando PP sia funnormale (149.); il che dà a conoscere, che la PN nel vertice A della curva AF, o AM diventa asintoto.

ESEMPIO VI.

151. Sia di nuovo AF una curva qualunque, e l'altra AM sia tale, che la FM sia sempre eguale all'arco FA, ma questa curva AM non si confideri più relativamente all'asse interiore AP, come nell'esempio antecedente, ma bensì all'e-

all' esteriore AO. Già si è detto, esser la sua sottangente

$PT = \frac{MP \times PG}{GF + PF}$, onde l'equazione alla curva AS sarà OS

$= \frac{TP}{PM} = \frac{PG}{FG + PF}$, e la sua quadratura $AO \times OS = OM \times r$

cioè eguale al prodotto dell'applicata OM in quella quantità costante, che si vuol moltiplicare nella formula $\frac{PG}{FG + PF}$

$= OS$, a fine di determinare la lunghezza della detta OS.

Data dunque la natura della curva AF, si può con essa sola costruire la curva AS, pigliando gli equivalenti della tangente, e sottangente ne' termini o d'ascissa, o d'ordinata, o d'amendue promiscuamente.

COROLLARIO.

152. Quindi se la curva AF sarà un'emicerchio, e l'altra AM in conseguenza una semicicloide, siccome in questa la tangente TM è parallela alla corda AF (42.43.),

ed è $\frac{TP}{PM} = \frac{AP}{PF}$, l'equazione alla curva AS sarà $OS = \frac{AP}{PF}$,

il che fa il carattere d'una Versiera, che può dirsi *cicloideale*, perchè costa di seni versi divisi per seni retti, applicati all'asse esteriore della cicloide, e che ha l'aree all'applicate esteriori di detta cicloide proporzionali.

SCO-

S C O L I O.

153. Offervisi generalmente, che quando la curva AM rivolgerà la convessità all'asse, la curva DN, o farà asintotica, è la dimostrazione si riferirà alle *Figure* 24. 31., o non asintotica, e la dimostrazione si riferirà alle *Figure* 29. 30.; e qui di nuovo se l'area curvilinea trovata ANP supererà la metà del rettangolo APN, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 29., ma se sarà superata dalla metà del detto rettangolo APN, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 30.. In oltre quando la curva AM rivolgerà la concavità all'asse, e che la curva ritrovata DN sia asintotica, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 33., e non essendo asintotica, alla *Fig.* 32.

PROPOSIZIONE XI.

154. *Essendo nota la natura d'una data curva, costruire, e quadrare un'altra curva, le di cui aree intorno all'asse comune siano proporzionali a' quadrati delle corrispondenti semiordinate della curva data.*

Sia la curva data AM (*Fig.* 55.), le di cui coordinate MP, ME estendansi in Q, F in maniera, che fatta $EF = MP$, sia $PT:PM::EF:PQ$, e così sempre; dico, che sarà costrutta, e quadrata la curva ricercata.

Tirinsi le *mpq*, *mef* infinitamente prossime, e parallele alle MPQ, MEF. Per essere $PT:PM::mo(Pp):oM(Ee)$, farà ancora $Pp:Ee::EF:PQ$; onde $Ee \times EF = Pp \times PQ$; ma tutte le EF eguali alle PM, ed applicate alla EI formano

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 257

mano un triangolo rettangolo equicrure; dunque tutta l'area AQP essendo eguale ad un tal triangolo, eguiglierà la metà del quadrato della EI , cioè della PM , e farà in conseguenza al quadrato di detta PM proporzionale; il che &c.

COROLLARIO I.

155. Per essere $PT:PM::PM:PQ$, l'equazione alla curva AQ farà $PQ = \frac{PM^2}{PT}$, onde sostituiti ne' casi speciali gli equivalenti in termini di AP , se ne conoscerà la natura.

COROLLARIO II.

156. Abbassata dal punto M la MS normale in M alla data curva AM , essendo la funnormale $SP = \frac{PM^2}{PT}$, se all'asse AP si applicherà in P la PQ eguale alla corrispondente funnormale SP della data curva AM , si otterrà molto facilmente la costruzione della curva richiesta, la di cui quadratura farà ancora $\frac{1}{2} SP \times PT$.

COROLLARIO III.

157. Se la EF non farà eguale, ma proporzionale alla MP , la figura EFI farà sempre un triangolo rettangolo, onde fatto $EF = \frac{n}{K} PM$, la curva AQ costrutta nel modo

K k
divi-

258 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

divisato avrà lo spazio $AQP = \frac{1}{2} n \overline{PM}^2$, e perciò sarà tuttavia come il quadrato della femiordinata PM .

COROLLARIO IV.

158. Quindi se intorno al medesimo asse AP (*Fig. 10.*) faranno più curve AM , AQ , AN , e che l'aree AQP , ANP siano proporzionali al quadrato della femiordinata PM , quest'aree staranno fra loro come le basi PQ , PN .

COROLLARIO V.

159. Quando adunque intorno ad un asse comune faranno situate due curve tali, che l'aree d'una di loro, sapiafi, essere in ragion duplicata delle femiordinate corrispondenti dell'altra curva, la prima curva farà sempre quadrabile; imperciocchè sia AQ la curva data; descritta con l'esperto metodo la curva AN , la di cui area $ANP = \frac{1}{2} \overline{PM}^2$, indi alle tre quantità PN , PQ , $\frac{1}{2} \overline{PM}^2$, trovata la quarta proporzionale $\frac{PQ \times \overline{PM}^2}{2PN}$, questa eguaglierà l'area data AQP .

Co-

COROLLARIO VI.

160. Se la EF (Fig. 55.) non più eguale alla semiordinata PM, ma facciasi una quantità costante qualunque, lo spazio curvilineo AQP costruito con l'accennato metodo farà per lo stesso raziocinio eguale al rettangolo EFC, e però starà come la IE, ovvero come l'applicata PM.

COROLLARIO VII.

161. L'equazione dunque alla curva AQ, le di cui aree stanno come l'applicata PM della curva AM, ambe adiacenti intorno l'asse comune AP, fatta la costante EF = 1, farà $PQ = \frac{PM}{PT}$, e però surrogati gli equivalenti in termini di AP, se ne conoscerà a un punto istesso la natura, e la quadratura.

COROLLARIO VIII.

162. Quando dunque vi siano due Curve AQ, AM situate intorno ad un asse comune AP, l'una delle quali, cioè la AQ, abbia l'aree AQP proporzionali alle corrispondenti semiordinate PM dell'altra AM, l'aree AQP faranno sempre quadrabili; ma per ottenere tal quadratura conviene trovare la costante 1, per poi moltiplicarla nella semiordinata

K k 2

nata

nata PM; dunque per esservi l'analogia $PT:PM::1:PQ$,
 a rassi $1 = \frac{PQ \times PT}{PM}$; sicche la quadratura dell'area AQP sa-
 rà $PT \times PQ$; il che confronta con ciò, che con diverso ra-
 ziocinio si è superiormente dimostrato (78.).

COROLLARIO IX.

163. Generalmente se intorno alla base IB, ovvero
 per minor confusione intorno all'asse esteriore AK sarà de-
 scritto uno spazio rettilineo, o curvilineo qualunque AVNR,
 indi prolungata la MR in N, facciassi la solita analogia $TP:$
 $PM::RN:PQ$, il natone spazio curvilineo AQP farà per
 il medesimo raziocinio eguale alla figura AVNR.

COROLLARIO X.

164. Sarà dunque facilmente ottenibile l'equazione ge-
 nerale alla nata curva AQ, data la natura della figura AVNR,
 qual' equazione. farà $PQ = \frac{PM \times RN}{PT}$; onde essendo data la
 RN per la AR, cioè per la PM, e questa per la AP, si
 potrà, surrogati gli equivalenti, assegnar l'equazione alla PQ
 in termini di AP.

Co-

COROLLARIO XI.

165. Quindi la data figura AVNR rettilinea, o curvilinea si potrà trasformare con tal metodo in infinite curve diverse fra loro tanto nel genere, che nella specie, restando sempre costante la loro eguaglianza nel tutto, e nelle parti corrispondenti, e ciò col mutar continuamente la curva AMB, ed assumerne un'altra a piacere di qualunque grado, e di qualunque carattere, la quale rivolga la convessità, o la concavità all'asse, ovvero abbia la base infinita, o finita, secondo la configurazione, che si vuol dare alla curva cercata A Q, la quale in conseguenza può essere adjacente all'ascissa AI, o a qualunque sua eguale, e parallela KB, di quella grandezza che si vuole, quando ancora esser debba infinita, ovvero può esser situata fra due asintoti IO, IA &c.

COROLLARIO XII.

166. Viceversa data la figura rettilinea, o curvilinea AQOI aderente all'asse AI di una qualunque curva AM, e fatto $MP:PT::PQ:RN$, ne nascerà la figura AVNR adjacente alla AR, che corrisponde alla semiordinata PM, ed eguale tanto in tutto, che in parte, alla data figura A Q; qual figura AVNR può trasformarsi anch'essa interminabilmente in diversissime figure, salva l'eguaglianza degli spazj, e ciò col mutar continuamente la curva AMB.

Co-

COROLLARIO XIII.

167. Si potrà dunque, quando si voglia, applicare alla semiordinata quell'area rettilinea, o curvilinea, che era applicata all'ascissa corrispondente, e viceversa.

COROLLARIO XIV.

168. Se la curva AQ fosse l'istessa curva AM, allora per esser sempre $PQ = PM$, anche la EF, o la RN saranno eguali alla sotttangente PT; sicche ancora le figure EFC, AVNR risultanti dalle sotttangenti PT applicate alle BI, AK ne' luoghi congrui EF, RN, faranno eguali allo spazio curvilineo AMP; il che pure conferma le cose già dimostrate (110.111.).

COROLLARIO XV.

169. Essendo data la PT per la $PM = AR$, ancor l'equazione alla curva VND, che è $RN = \frac{PQ \times PT}{PM}$ farà data in termini di RN, e di AR.

COROLLARIO XVI.

170. Se adattato sull'ascissa AI della curva AMB (Fig. 36.) il rettangolo AIYX, si farà l'analogia $MP:PT::AX:EF$,

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 263

EF, e così sempre, l'equazione alla natante curva CF sarà

$EF = \frac{PT}{MP}$; e l'area curvilinea ICFE sarà eguale al rettangolo corrispondente APQ; onde la detta area ICFE, sarà

come l'ascissa AP, o come l'applicata esteriore RM.

COROLLARIO XVII.

171. Quando dunque sia noto, che l'area d'una curva aderenti alla base BI parallela alle semiordinate PM di un'altra curva AMB, ovvero adjacenti al di lei asse esteriore AK, siano proporzionali all'ascisse corrispondenti AP di questa seconda curva, le dette aree faranno sempre quadrabili; imperciocchè essendo in tal caso la costante $AX =$

$\frac{MP \times EF}{PT}$, la quadratura generale di tal curva CL sarà

$$\frac{MP \times AP \times EF}{PT}.$$

COROLLARIO XVIII.

172. Se all'asse AI si applichi la $PZ = AP$, e così sempre, ne proverrà il triangolo AIY; fatta dunque l'analogia $MP:PT::PZ:EF$, l'equazione alla curva risultante

CL sarà $EF = \frac{PT \times AP}{MP}$, e la sua quadratura sarà $\frac{1}{2} \overline{AP}^2$, onde lo spazio curvilineo ICFE sarà come il quadrato dell'ascissa AP, o dell'applicata esteriore RM.

Co-

COROLLARIO XIX.

173. Quando anche la PZ non eguagliasse la AP, ma le fosse proporzionale, lo spazio ICFE starebbe nondimeno come il quadrato dell'ascissa AP, perchè sarebbe sempre eguale al triangolo APZ.

COROLLARIO XX.

174. Sicchè se intorno alla medesima applicata PM, ovvero se intorno alle sue eguali, e parallele AR, IE fossero descritte con l'accennato metodo (172.173.) due ineguali spazj curvilinei AVNR, ICFE, ambi in ragion duplicata dell'ascissa AP, questi spazj staranno fra loro come le semiordinate RN, EF.

COROLLARIO XXI.

175. Quando dunque sarà noto, che l'area d'una curva CL adjacente alla base BI parallela alle semiordinate PM d'un'altra curva AMB siano proporzionali a'quadrati dell'ascisse corrispondenti AP di questa seconda curva, l'area nominata saranno sempre quadrabili; imperciocchè sia CL la data curva, la di cui area ICFE stia come \overline{AP}^2 ; descritta la curva VND, la di cui area $AVNR = \frac{1}{2} \overline{AP}^2$, trovisi alle tre quantità RN, EF, $\frac{1}{2} \overline{AP}^2$ la quarta proporzionale $\frac{EF \times \overline{AP}^2}{2RN}$, che eguaglierà l'area data ICFE.

Co-

E S E M P I O I.

176 Sia all'infinita Parabole, ed Iperboli tra gli anfitoti l'equazione $AP = \overline{PM}^n$, (Fig. 55.) intendendo per n un numero qualunque intero, o rotto, positivo, o negativo, farà $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^{\frac{2}{n}}$; onde $PQ = \frac{\overline{PM}^2}{TP} (155.) = \frac{\overline{PA}^{\frac{2}{n}}}{\overline{AP}^{\frac{2}{n}-1}}$; equazione alle Parabole quando $\frac{2}{n} > 1$; e all'Iperboli tra gli anfitoti quando $\frac{2}{n} < 1$.

C O R O L L A R I O

177. Se dunque $n = 2$, farà $PQ = \frac{1}{2}$, cioè la figura AQP farà un rettangolo eguale al triangolo IEF.

Se $n = \frac{2}{3}$, farà $PQ = \frac{2}{3} \overline{AP}^{\frac{2}{3}}$, equazione alla Parabola apolloniana riferita all'asse esteriore; sicchè l'equazione alla data curva AM (Fig. 57.) essendo $\overline{AP}^3 = \overline{PM}^2$, l'area AQP di detta Parabola apolloniana AQ riferita all'asse esteriore AP starà, come \overline{AP}^3 , il che è verissimo (57). Essendo poi la sua quadratura assoluta $= \frac{1}{2} \overline{PM}^2 = \frac{1}{2} \overline{AP}^3 = \frac{1}{2} \overline{AP}^2 \times \overline{AP}$, ed essendo $\frac{1}{2} \overline{AP}^2 = \frac{1}{3} PQ$, farà lo spazio parabolico esteriore $AQP = \frac{1}{3} \overline{AP} \times PQ$, il che confronta con la data misura (85.)

L 1

Se

Se $n=4$, farà $PQ = \frac{1}{4} \overline{AP}^{-\frac{1}{2}}$, ovvero $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{16AP}$; equazione all' Iperbole cubica tra gli anfitoti, la di cui quadratura eguaglia $\frac{1}{2} \overline{PM}^{-2}$; ma l'equazione alla data curva AM (Fig. 58.) è $AP = \overline{PM}^4$; dunque essendo $\frac{1}{2} \overline{AP}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \overline{PM}^2$, l'area di tal' Iperbole starà in ragion sudduplicata della sua ascissa AP, come dev'essere (61.); ma la sua quadratura assoluta è $\frac{1}{2} \overline{AP}^{-\frac{1}{2}} = \frac{AP}{2\sqrt{AP}}$, ed è $\frac{1}{4\sqrt{AP}} = PQ$, e però $\frac{1}{2\sqrt{AP}} = 2PQ$; dunque sostituito questo valore, la detta quadratura assoluta dello spazio iperbolico AVQP farà $2AP \times PQ$ coincidente con la già data (89.).

Se $n = -2$, farà $PQ = -\frac{1}{2} \overline{AP}^{-2}$, ovvero $2AP = \frac{1}{PQ^{-1}}$; equazione ad un' Iperbole tra gli anfitoti, in cui il segno negativo, che precede l'ascissa AP, denota, che l'area quadrabile dev'essere presa dalla parte opposta al centro, cioè non l'area AVQP (Fig. 59.), ma l'area QDP, il che pure la genesi della curva ci dimostra; qual'area QDP eguagliando $\frac{1}{2} \overline{PM}^{-2}$, starà in ragione inversa dell' ascissa AP, perchè l'equazione alla data curva MN è $AP = \overline{PM}^{-2}$, ov-

ve-

vero $\overline{PM}^2 = \frac{1}{AP}$; la quadratura poi assoluta dell' area QDP
essendo $= \frac{1}{2} \overline{PM}^2 = \frac{1}{2AP} = \frac{AP}{2AP^2}$ sostituiti i valori , di-
verrà $PQ \propto AP$; qual appunto si trovò superiormente (91.). &c.

E S E M P I O II.

178. Sia di nuovo l'equazione $AP = \overline{PM}^n$ ad infinite
Parabole , ed Iperboli tra gli asintoti, sarà $PT = nAP$ (22.)
 $= n\overline{PM}^n$; onde avremo EF (Fig. 56.) $= \frac{PT \propto AP}{\overline{PM}}$ (172.)
 $= n\overline{PM}^{2n-1}$; equazione nuovamente alle Parabole quando
 $2n > 1$, e alle Iperboli tra gli asintoti quando $2n < 1$.

S C O L I O.

179. Quando con questo metodo si desidera la quadra-
tura di una curva particolare tra l' infinite , che dà un' e-
quazione generale , basta far l'equazione tra l' esponente ge-
nerale , e il particolare , che possiede la curva proposta , e
ricavarne il valore di n ; così trattandosi di Parabole , se si
volesse ridurre l'equazione generale $EF = n\overline{PM}^{2n-1}$ alla
Parabola apolloniana , il di cui esponente è 2 , facciasi $2n$
 $- 1 = 2$, e si avrà $n = \frac{1}{1}$, onde posto $\frac{1}{1}$ in luogo di n ,
sarà $EF = \frac{1}{2} \overline{PM}^2 = \frac{1}{2} \overline{IE}^2$, equazione alla prefissa Parabola.

268 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

Parimente se si bramasse la quadratura d' un' Iperbole tra gli asintoti del grado espresso per $-\frac{1}{7}$, facciasi $2n-1 = \frac{1}{7}$, si avrà $n = \frac{4}{7}$; posto dunque tal valore in luogo di n , si otterrà $EF = \frac{1}{7} \overline{IE}^{\frac{1}{7}}$.

Così facciasi nell' altre equazioni generali, che può dare tanto il presente metodo, che qualunque altro incluso ne' Corollarj della presente proposizione; la quadratura poi più netta, e più comoda, che si deve cercare sulle variabili della proposta Figura, si trovi con un ripiego simile a quello usato nel Corollario dell' Esempio antecedente.

E S E M P I O III.

180. Sia AM (*Fig. 55.*) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI; farà $PT:PM::AP:PG$ (42.43.), onde posta la costante $EF=1$, facciasi incessantemente $AP:PG::1:PQ$, farà $PQ = \frac{PG}{AP}$; equazione ad una Versiera, la di cui quadratura eguaglia il prodotto della semiordinata PM nella presa quantità costante (160.).

COROLLARIO. I.

181. Giacche gli spazj di questa curva stanno come le corrispondenti applicate della cicloide, vedesi, che ella è la Versiera Grandiana più volte nominata (29.95.96.137.), di cui rendesi facilissima la costruzione.

Co-

COROLLARIO II.

182. Supposto, che la curva AQ sia una Versiera Grandiana, il di cui semicerchio genitore AGI, se viceversa si facesse $PG:AP::PQ:RN$, la nata figura AVNR eguaglierebbe l' area corrispondente AQP (166.); ma la RN è una quantità costante, perchè eguaglia $\frac{PQ \times AP}{PG}$, ed è $PQ = \frac{PG}{AP}$; dunque la figura AVNR farebbe in questo caso un rettangolo, ed in conseguenza l' area AQP eguaglierebbe il prodotto della semiordinata PM in una quantità costante, come già si avvertì (95.), e di nuovo si conoscerebbe, che è proporzionale alla detta semiordinata cicloidale PM.

ESEMPIO IV.

183. Sia AM (Fig. 56.) replicatamente una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e presa AX per costante, facciasi nuovamente $PG:AP::1:RN$, e così sempre, si avrà $RN = \frac{AP}{PG}$; equazione alla curva VN chiamata da me poco anzi (152.) Versiera Cicloidale, la quale è reciproca alla Versiera precedente, e quadrabile (170.), giacche lo spazio AVNR eguaglia il prodotto del corrispondente seno verso AP nella presa costante AX.

Co-

COROLLARIO

184. Gli spazj dunque di questa Versiera stanno come l'applicate RM all'asse esteriore della cicloide, il che confronta con le cose già dette (151. 152.).

ESEMPIO V.

185. Sia da capo AM (Fig. 55.) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e facciasi continuamente $AP:PG::PM:PQ$, ne nascerà la curva AQ, che chiamerò *Versiera Ciclo-cicloidale*, per aver l'equazione $PQ = \frac{PG}{AP} \propto PM$, e la di cui quadratura è $\frac{1}{2} \overline{PM}^2$.

COROLLARIO

186. L'area dunque AQP di questa curva è proporzionale al quadrato della femiordinata cicloidale PM.

ESEMPIO VI.

187. Sia tuttavia AM (Fig. 56.) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e facciasi $PG:AP:AP:RN$; ne risulterà la curva VN, che farà una versiera cicloidale del secondo grado, la di cui equazione $RN = \frac{AP^2}{PG}$, e la di cui quadratura è $\frac{1}{2} \overline{AP}^2 = \frac{1}{2} \overline{RM}^2$ (172).

Co-

COROLLARIO

188. Dunque l'area di questa curva è proporzionale al quadrato della corrispondente applicata all'asse esteriore della cicloide.

ESEMPIO VII.

189. Sia la curva AOM (Fig. 39.) compresa nell'infinita Parabola, l'equazione delle quali è generalmente $AP = \overline{PM}^n$, intendendo al solito per n qualsivoglia numero positivo intero, o rotto; e la curva PQN passi per l'estremità di tutte le MN, RQ applicate alla semiordinata PM, ed eguali alle sottangenti corrispondenti PT, &c. Per essere ogni sottangente $PT = nAP$ (22.) $= n\overline{PM}^n$, l'equazione alla curva NQ farà $MN = \overline{PM}^n$; vale a dire la figura PNM eguale all'area parabolica AMP (110. 168.) sarà sempre anch'essa una Parabola del medesimo ordine, e del medesimo parametro moltiplicato per n , ma rivolta con la convessità all'asse PM, quando l'altra Parabola rivolga la concavità all'asse AP, e viceversa.

Co-

COROLLARIO

190. Dunque data un' area Parabolica AOB aderente all'asse AB, se ne potrà costruire un' altra PQR del medesimo grado, aderente alla semiordinata $BO = PR$, che tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti eguagli la prima.

E S E M P I O VIII.

191. Sia la curva BM (Fig. 60.) compresa nell'equazione $AP = \overline{PM}^n$, che è all' infinite Iperboli tra gli asintoti, e la curva ND nasca dall' estremo contatto di tutte le fortangenti PT, p applicate all' asintoto AR ne' luoghi congrui, cioè delle RN, rn . Essendo ogni fortangente $PT = -n AP$ (26.) $= -n \overline{PM}^n$, l'equazione alla curva ND farà $RN = -n \overline{PM}^n$; ovvero $AQ = -n \overline{QN}^n$; il che dimostra, che la curva ND è anch' essa un' Iperbole tra gli asintoti del medesimo rango, che tiene la BM, ma a causa del segno negativo deve avere una posizione contraria a quella dell' Iperbole BM, come mostra la figura, e come insegna la costruzione.

COROLLARIO

192. Data dunque un'area Iperbolica ABMR adjacente ad una retta RM parallela, ed eguale all'ascissa AP; se ne può costruire un'altra ADNR del medesimo grado, adjacente alla AR parallela, ed eguale alla femiordinata PM in maniera, che sia sempre tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti, eguale alla dett' area ABMR.

ESEMPIO IX.

193. L'equazione alla curva AM (Fig. 55.) sia $AP = \overline{PM}^n$, cioè ad infinite Parabole, e la curva AQ sia compresa nell'equazione $\overline{PQ}^m = AP \pm \overline{AP}^2$, che col segno affermativo è ad infinite Iperboli, e col negativo ad infiniticer.

chj; per essere $AP \pm \overline{AP}^2 = \overline{PM}^n \pm \overline{PM}^{2n}$, avremo $RN = \frac{PT \times PQ}{PM}$

$$(166.) = \overline{nAR}^{n-1} \times \left(\overline{AR} \pm \overline{AR}^2 \right)^{\frac{1}{m}}; \text{onde } \overline{RN} = \overline{nAR}^{\frac{mn-m+1}{m}} \pm \overline{nAR}^{\frac{mn-m+2n}{m}}$$

COROLLARIO

194. Quindi se $n=m=2$, cioè se la curva AM sarà una Parabola apolloniana, e AQ un cerchio, o un Iperbole equilatera, l'equazione alla curva VN, ch'eguaglia nell'

M m aree

aree AVNR l'aree AQP, farà $\overline{RN} = \sqrt[2]{4 \overline{AR} \pm 4 \overline{AR}^6}$.

Se $m=2$, $n=3$, farà $\overline{RN} = \sqrt[2]{9 \overline{AR} \pm 9 \overline{AR}^{10}}$.

Se $m=n=3$, farà $\overline{RN} = \sqrt[3]{27 \overline{AR} \pm 27 \overline{AR}^{12}}$.

Se $m=3$, $n=2$, farà $\overline{RN} = \sqrt[3]{8 \overline{AR} \pm 8 \overline{AR}^7}$.

E S E M P I O X.

195. Ritenuta l'equazione $\overline{AP} = \overline{PM}^n$ riguardo alla curva AM, pigliati rispetto alla curva VN l'equazione $\overline{RN} = \overline{AR} \pm \overline{AR}^2$; farà $\overline{PQ} = \frac{\overline{PM} \times \overline{RN}}{\overline{PT}} (164.) = \frac{1}{n} \overline{AP}^{\frac{1-n}{n}} \times (\overline{AP}^{\frac{1}{n}} \pm \overline{AP}^{\frac{2}{n}})^{\frac{1}{m}}$,
onde $\overline{PQ} = \frac{1}{n^m} \overline{AP}^{\frac{1+m-mn}{n}} \pm \frac{1}{n^m} \overline{AP}^{\frac{2+m-mn}{n}}$

C O R O L L A R I O

196. Quindi se $m=n=2$, farà $\overline{PQ} = \frac{1}{4} \overline{AP}^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4} \overline{AP}^{\frac{3}{2}}$.
Se $m=2$, $n=3$, farà $\overline{PQ} = \frac{1}{27} \overline{AP}^{\frac{1}{3}} \pm \frac{1}{27} \overline{AP}^{\frac{2}{3}}$.
Se $m=n=3$, farà $\overline{PQ} = \frac{1}{27} \overline{AP}^{\frac{1}{3}} \pm \frac{1}{27} \overline{AP}^{\frac{4}{3}}$.
Se $m=3$, $n=2$, farà $\overline{PQ} = \frac{1}{8} \overline{AP}^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{8} \overline{AP}^{\frac{3}{2}}$.

Co-

S C O L I O.

197. Da questi due ultimi Esempj, e da altri, che potrebbero addurre, comprendesi agevolmente, che un'equazione si può innalzare, salva l'area, che rappresenta, a gradi superiori, e viceversa; e ciò in infiniti modi, trasformando continuamente l'area curvilinea data, come già si disse (165. 166.).

PROPOSIZIONE XII.

198. *Costruire intorno ad un asse comune, e quadrare una Figura, le di cui aree siano in ragione qualunque moltiplicata, o sommoltiplicata diretta, o inversa delle coordinate, ovvero dell'applicate d'una data curva, tanto dalla parte concava, che dalla convessa.*

N. 1. Intorno alla retta AK (Fig. 63. 64. 65. 66. 67. 68.) normale in A all'asse AP della data curva MB descrivasi una curva NL, la di cui equazione sia general-

mente $RN = \overline{AR}^m$ (intendendo per m un numero qualunque intero, o rotto; positivo nelle Figure 63. 65. 67., nel qual caso la detta equazione farà all' infinite Parabole; negativo nelle Figure 64. 66. 68., ed allora l'equazione farà all' infinite Iperboli tra gli Anfitoti); indi per la Proposizio-

M m 2

ne

ne X. (145.) costruiscasi la Figura AKDF tale, che le sue aree AFOR (Fig. 63. 65. 67.), RKDO (Fig. 64. 66. 68.) siano proporzionali all'applicate RN, e prolunghinsi le applicate ONR, FLG fino a i contatti in M, H della data curva MB. Tirata poscia la tangente MT, e fatta l'analogia $PT:PM::RO:PQ$, e così sempre, costruiscasi in tal guisa la Figura ZPQ; dico, che l'area PZQ sarà in ragione moltiplicata, o sommoltiplicata diretta (Fig. 63. 65. 67.), o inversa (Fig. 64. 66. 68.) dell'applicata PM.

Imperciocchè essendo $AR=PM$, la RN starà come le potenze positive (Fig. 63. 65. 67.), o negative (Fig. 64. 66. 68.) dell'applicata PM; onde in ragione di tali potenze starà ancora l'area AFOR (Fig. 63. 65. 67.); ovvero RKDO (Fig. 64. 66. 68.); ma l'area PZQ eguaglia l'area AFOR (Fig. 63. 65. 67.), ovvero RKDO (Fig. 64. 66. 68.) per le cose dimostrate (163.); dunque l'area PZQ starà direttamente (Fig. 63. 65. 67.), o inversamente (Fig. 64. 66. 68.) in qualunque ragione moltiplicata, o sommoltiplicata della corrispondente applicata PM. Tirata poi la tangente Nr, la quadratura di dett'area PZQ sarà generalmente $NR \propto RO$ (81. 163.); il che dimostra la prima parte.

N. 2. Vicendevolmente preso AK per asse, intorno alla retta AP normale in A alla AK descrivasi una curva

XY, la di cui equazione sia generalmente $PX = \overline{AP}^m$ (intendendo come sopra per m un numero qualunque intero, o rotto; positivo nelle Fig. 63. 65. 68. negativo nelle Fig. 64. 66. 67.), indi per la Proposizione X. (146.) costrutta la Fig. ZQP tale, che le sue aree PZQ siano proporzionali all'applicate PX, prolunghin-

fi le XP fino al contatto in M della data curva MB e da punti M condotte le indefinite MRO parallele all'AP, e tirata la tangente MT, facciasi $PM:PT::PQ:RO$, e così da per tutto in maniera che venga a costruirsi la figura AKDO; dico, che tal figura averà l'aree in ragione moltiplicata, o summoltiplicata diretta, o inversa delle corrispondenti applicate RM:

La dimostrazione è simile alla precedente, e la quadratura di detta figura AKDO ritrovasi con l'istesso metodo; onde resta dimostrata ancora la seconda parte, e tutta in conseguenza la Proposizione.

In altra maniera.

N. 3. Trovifi (74.) la curva XY, le di cui applicate PX siano direttamente (Fig. 63. 65. 67.), o inversamente (Fig. 64. 66. 68.) come le potenze di qualunque genere dell'applicate corrispondenti PM; indi costrutta (140.) la curva QS, le di cui aree PZQ siano proporzionali all'applicate corrispondenti PX; è manifesto, che l'aree PZQ saranno direttamente (Fig. 63. 65. 67.), o inversamente (Fig. 64. 66. 68.) proporzionali alle potenze dell'applicate PM della data curva AM; e che condotta la tangente Xa, la quadratura dell'area PZQ sarà (81.) $aP \times PQ$; il che dimostra la prima parte.

N. 4. Trovifi ora (74.) la curva NL, le di cui applicate RN siano direttamente (Fig. 63. 65. 68.); o inversamente (Fig. 64. 66. 67.) come le potenze dell'applicate corrispondenti RM; poscia costrutta (140.) la curva FD, le di cui aree AFOR (Fig. 63. 65. 67.), ovvero RKDO (Fig.

(Fig. 64. 66. 68.) stiano come l'applicate corrispondenti RN della detta curva NL; è manifesto, che l'aree AFOR (Fig. 63. 65.) RKDO (Fig. 68.) faranno direttamente, e l'aree KKDO (Fig. 64. 66.), AFOR (Fig. 67.) inversamente proporzionali alle potenze dell'applicate RM; e che tirata la tangente Nr, la quadratura dell'area AFOR (Fig. 63. 65. 67.), ovvero dell'area RKDO (Fig. 64. 66. 68.) farà $rR \times RO$; il che dimostra la seconda parte; onde tutta resta dimostrata la Proposizione.

COROLLARIO I.

199. L'equazione dunque alla curva QS riguardo al N. 1. farà $PQ = \frac{PM \times RO}{PT}$; sicchè essendo $RO = \frac{RN}{Rr}$ (140.) $= \frac{\overline{m}R}{AR} = \overline{m-1}PM$, avremo $PQ = \frac{\overline{m}PM}{PT}$; onde surrogati i valori, si potrà avere non solo l'equazione alla PQ in soli termini di AP, quanto ancora un'altra costruzione della curva QS.

COROLLARIO II.

200. Essendo riguardo al N. 3. di questa dimostrazione $PX = \overline{AK}^m$, ed essendo data AR, ovvero PM per AP, s'avrà l'equazione alla PX in soli termini di AP;

on.

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 279

onde condotta la tangente Xa (17.), un'altra equazione alla

la curva QS farà $PQ = \frac{PX}{aP} \quad (140.) = \frac{PM^m}{aP}$.

COROLLARIO III.

201. Per essere $\frac{PM^m}{aP} = \frac{m^m}{P^m}$, farà $aP = \frac{PT}{m}$, onde per la quadratura dell'area PZQ si avrà $aP \times PQ = \frac{PT}{m} \times PQ$.

COROLLARIO IV.

202. Se invece di PQ si ponga il suo valore $\frac{mPM^m}{PT}$, avremo $aP \times PQ = \frac{m}{PT}$; quindi l'equazione alla curva QS farà nuovamente $PQ = \frac{mPM^m}{PT}$; riscontri amendue, che giustificano l'esattezza de' fatti ragionamenti.

COROLLARIO V.

203. L'equazione poi alla curva FD riguardo al N.2. farà $RO = \frac{PT \times PQ}{PM}$; ma è $PQ = \frac{PX}{aP} \quad (140.) = \frac{m^{m-1}}{mAP}$; dunque avremo $RO = \frac{m^{m-1}}{mAP} \times \frac{PT}{PM}$; sicchè dalla data equazione alla cur-

va

280 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

va MB ricavati, e sostituitigli equivalenti in termini di PM, ovvero di AR, si otterrà non solo l'equazione, quanto ancora la costruzione della curva ricercata DF,

COROLLARIO VI.

204. Essendo $RN = PX$, l'equazione alla curva NL riguardo al N. 4. farà $RN = \overline{AP}^m$; giacche dunque è data AP per PM, ovvero AR, s'avrà l'equazione alla curva NL in soli termini di AR; ed un'altra equazione alla curva DF farà $RO = \frac{RN}{Rr} (140.) = \frac{\overline{AP}^m}{Rr}$.

COROLLARIO VII.

205. Siccome $\frac{\overline{AP}^m}{Rr} = \frac{m \overline{PA} \times \overline{PT}}{AP \times PM} (203.)$, se ne deduce $Rr = \frac{AP \times PM}{m \overline{PT}}$; onde la quadratura della curva DF farà $\frac{AP \times PM \times RO}{m \overline{PT}}$,

COROLLARIO VIII.

206. Quindi ricaverassi $RO = \frac{m \overline{PT} \times \overline{AP}^{m-1}}{PM}$ come prima (203.), e nell'equazione $Rr \times RO = \frac{AP \times PM \times RO}{m \overline{PT}}$ posto in

vc-

vece di RO questo valore $\frac{\overline{mAP} \times \overline{PT}}{\overline{PM}}$, si otterrà $R \times RO$

$= \overline{AP}^m = \overline{RM}^m$; quali due congruenze servono di riprova alle fatte operazioni, per renderle sicure.

COROLLARIO. IX.

207. Se l'area AFOR (*Fig. 63. 65. 67.*) dovesse stare come l'applicata PM, è evidente che tutta la figura sarebbe un rettangolo, e se la dett' area AFOR dovesse stare come il quadrato dell'applicata PM, tutta la figura si convertirebbe in un triangolo rettangolo; onde in amendue i casi la figura AQP sarebbe facilmente quadrabile; il che già s'avverrà (154. 160. 170. 172.). &c.

COROLLARIO X.

208. Sarà generalmente riducibile a dimensione qualunque spazio curvilineo, quando sappiasi, che le sue aree situate intorno ad un asse comune con un'altra curva stiano in qualsivoglia ragione moltiplicata, o summoltiplicata, diretta, o inversa dell'applicate sì interne, che esterne di questa seconda curva; imperciocchè se sia noto, che l'area PZQ della curva QS stia in ragione moltiplicata, o summoltiplicata diretta, o inversa delle potenze, alle quali è innalzata l'applicata PM della data curva MB, la di cui sottangente

N n

PT

PT sia cognita, la quadratura di dett' area farà $\frac{PT}{m} \propto PQ$ (201.); e se l'area AFOR (Fig. 63. 65. 67.), ovvero RKDO (Fig. 64. 66. 68.) della curva FD sia nell'istesso caso riguardo all'applicata RM della data curva MB, la sua quadratura farà $\frac{AP \propto PM \propto RO}{mPT}$ (205.).

S C O L I O.

209. Non bisogna per altro dimenticarsi, che la quantità m v'è accompagnata col segno positivo, quando si tratta di trovare l'equazione ad un' area, che stia direttamente come le potenze dell'applicata interna, o esterna d'una data curva. Viceversa poi deve esser unita al segno negativo, quando si vuol trovar l'equazione ad una figura, che stia reciprocamente come le potenze dell'applicata interna, o esterna della data curva.

E S E M P I O I.

210. Sia MB (Fig. 63. 65. 67.) una curva compresa nell'equazione $AP = \overline{PM}^n$, cioè ad infinite Parabole quando n è positivo, e ad infinite Iperboli tra gli asintoti quando è negativo; s' avrà $PT = nAP = n\overline{PM}^n$; onde l'equazione alla curva QS farà $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{m-n}$ (199.).

Co-

COROLLARIO I.

211. Se m, n sono amendue positivi, la formula resta $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{m-n}$; se m, n faranno amendue negativi, farà l'equazione $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{n-m}$; se m è positivo, n negativo, dirà l'equazione $PQ = -\frac{m}{n} \overline{PM}^{m+n}$; se m è negativo, n positivo, l'equazione dirà $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{-m-n}$.

COROLLARIO II.

212. Se dunque AM (Fig. 63.) fosse una Parabola Apolloniana, e si volesse fare adjacente al suo asse AP una figura AIS tale, che le sue aree AQP stiano come i cubi dell'applicate PM, fatto $m = 3, n = 2$, si avrà $PQ = \frac{1}{2} \overline{PM} = \frac{1}{2} \sqrt{AP}$; qual'equazione essendo nuovamente alla Parabola Apolloniana, indica, che le sue aree stanno come i cubi delle sue ordinate; il che è verissimo, perchè stando l'area AMP come $AP \times PM$ (55.), starà, fatta la sostituzione, come \overline{PM}^3 (57.).

La quadratura poi di tal Parabola ritrovata, che rivolge la concavità all'asse, farà $\frac{2}{3} AP \times PQ$ (201.), come appunto deve essere.

COROLLARIO III.

213. Sia AM nuovamente una Parabola Apolloniana; e la figura AIS sia tale, che l'area AQP stia come la quarta potestà di PM, fatto $m = 4$, $n = 2$, s' avrà $PQ = 2\overline{PM}^{\frac{2}{2}} = 2AP$; dal che deducesi, che l'area AQP farà un triangolo, il che è verissimo; imperciocchè essendo $\overline{AP}^{\frac{2}{2}} = \overline{PM}^{\frac{4}{2}}$, a volere, che la figura APQ stia come la quarta potestà di PM, bisogna, che stia come il quadrato di AP, e perciò deve essere un triangolo, la di cui misura è $\frac{1}{2} AP \times PQ$ come appunto ricavasi dagli Elementi.

COROLLARIO IV.

214. Se MB (Fig. 68.) fosse un' Iperbole cubica tra gli asintoti, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^{-2}$, e si volesse, che una figura PAQ aderente al suo asse AP avesse l'area inversamente proporzionali al quadrato di PM, fatto $m = -2$, $n = -2$, farà $PQ = 1$, il che dà a conoscere, dover la figura APQ essere un rettangolo, la di cui misura è $AP \times PQ$; il che pure è verissimo.

Co.

COROLLARIO V.

215. Sia la curva MB (*Fig. 64.*) una Paraboloide, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{1}{2}}$, e si debba trovare una figura, le di cui aree siano reciproche alle quinte potestà delle sue applicate PM; avremo $m = -5$, $n = \frac{1}{2}$; onde farà $PQ = -\frac{10}{3} \overline{PM}^{-\frac{11}{2}}$ (211.) $= -\frac{10}{3} \overline{AP}^{-\frac{11}{2}}$; equazione ad una delle Iperboli tra gli asintoti; sicchè essendo questa la curva QS tra gli asintoti AV, AZ, la di lei area PZQ soddisfarà, come insegna la costruzione, al quesito; e la sua quadratura farà $\frac{2}{10} AP \times PQ$, come deve essere (92.).

S C O L I O.

216 Osservisi, che trattandosi di Parabole, e d' Iperboli tra gli asintoti, se nell'equazione alla curva QS annessa a tal categoria si piglierà inversamente il coefficiente dell'ascissa AP, e si moltiplicherà nel prodotto delle coordinate, siavrà sempre la quadratura della detta curva QS trovata.

E S E M P I O II.

217. Sia AM (*Fig. 69.*) una Cicloide ordinaria, il di cui cerchio genitore AGI; siccome in essa l'applicata MP
sta

sta alla sottangente PT, come PG: AP (42. 43.), l'equa-

zione alla curva QS farà $PQ = \frac{PG \propto PM^{m-1}}{AP}$, cioè ad infinite Verfiere; onde se l'area AVQP dovrà stare come la PM, farà $m = 1$, e l'equazione alla curva QS farà $PQ = \frac{PG}{AP}$, cioè alla Verfiere Grandiana (181.), che si potrà chiamare Ciclo-cicloidale del prim' ordine; ma se l'area AVQP dovrà stare come il quadrato della PM, farà $m = 2$, e l'equazione alla curva QS dirà $PQ = \frac{PG}{AP} \propto PM$, cioè farà alla Verfiere Ciclo-cicloidale del second' ordine (185.) &c. Se la figura AVQP dovrà stare in ragione inverfa delle potenze della PM, l'equazione alla curva QS farà $PQ = \frac{PG \propto PM^{-m+1}}{AP} = \frac{PG}{AP \propto PM^{m-1}}$ (209.), cioè ad infinite Verfiere

Ciclo-cicloidali d'altra specie.

Essendo poi $\frac{PT}{m} \propto PQ$ la dimensione generale della figura AVQP (201.), questa dimensione nel presente caso fa-

$$1^a \frac{AP \propto PM \propto PQ}{m \cdot G} = \frac{PM^m}{m}.$$

COROLLARIO I.

218. Se la figura AOR dovesse esser proporzionale all'applicata PM, farebbe un rettangolo (207.), onde la Verfiere AVQP descritta con tal rettangolo li farebbe eguale riguardo all'area (180.), quale varierà continuamente al
va.

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 237

variare della costante RO, dimodoche se fatto C centro del cerchio AGI, e condotte le CG, GI, fosse $RO = AC$, la Versiera QS costrutta sul detto rettangolo eguaglierebbe nella sua area AVQP il doppio del settore circolare corrispondente AIG, il che concorda con la data misura (96. 137.).

COROLLARIO II.

219. Se la figura AOR dovesse esser proporzionale al quadrato dell'applicata PM, farebbe un triangolo (207.), e perciò la Versiera QS costrutta sù tal triangolo, e che l'eguaglierà nell'area AVQP, muterà d'area continuamente al cangiarsi della RO. Che se fosse $RO = RA$, cioè se il triangolo rettangolo AOR fosse equicrure, l'area AVQP della detta Versiera QS farebbe eguale alla metà del quadrato della PM, come deve essere (154.).

ESEMPIO III.

220. Sia nuovamente AM una Cicloide ordinaria, il di cui cerchio genitore AGI, l'equazione alla figura AOR, che abbia l'area direttamente, o inversamente proporzionali alle potenze delle corrispondenti ordinate RM, farà $RO =$

$\frac{m-1}{mAP} \times PT$ (203.) $= \frac{m}{mAP} \frac{m}{PG}$ (42. 43.); equazione ad infinite Versiere Cicloidali quando m è positivo; onde se l'area AOR dovrà stare come la RM, farà $m = 1$, e l'equazione alla curva AO farà $RO = \frac{AP}{PG}$, cioè alla Versiera Cicloidale.

288 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 cloidale (152. 183.) del primo grado; che se $m = 2$;

l'equazione dirà $RO = \frac{2AP^2}{PG}$, e farà alla Versiera Ciconale del fecondo grado (187.); ma fe m foſſe negativo, l'equazione generale alla curva AO farebbe $RO = \frac{-m}{PG \times AP^m}$, cioè ad infinite Verſiere Ciconali d'altra ſpecie.

La quadratura poi generale della figura AOR eſſendo $\frac{AP \times PM \times RO}{mPT}$ (205.), diſcorrendoſi delle prime Verſiere, farà $\frac{PG \times RO}{m} = \frac{AP^m}{m}$.

S C O L I O ;

221. Se ſi riguarderà la Ciconale dalla parte convexa; come nella poſitura indicata dalla figura 65., dimodoche ſia riferita al ſuo aſſe eſteriore AP; e per la ſua ſottangente ſi conſideri la PT, ſi ricaveranno i medefimi valori notati in queſt' Eſempio, tanto riguardo all'equazione della ricercata curva in queſtione, quanto alla ſua quadratura; onde ancora col metodo eſpoſto nel N. 1. della dimoſtrazione della propoſizione preſente può eſſere ſciolto il Problema, che ſcioglieſi col metodo del N. 2.; e viceverſa. E quì noterò di paſſaggio, che v'è tra certe claſſi di curve una conneſſione, ed una ſpecie, per coſì dirſi, di anattoſi maraviglioſa, il che riſcontraſi dalle ultime antecedenti propoſizioni, le quali hanno il loro uſo anche nella Dinamica, come ſpero di far vedere quando ne tratterò relativi.

tivamente al mio fine. Intanto si passi ad un nuovo, e facilissimo metodo per costruire, e quadrare le curve, esposto nella seguente Proposizione e ne' suoi Corollarj.

PROPOSIZIONE XIII.

222. *Sommare due aree rettilinee, o curvilinee d'eguale altezza, cioè costruire una figura, che nella sua area eguagli la loro somma.*

Siano due figure, una rettilinea ABC (Fig. 70.), ed una curvilinea ADC intorno alla comune altezza AC, che posino in conseguenza sopra la base BD. Risolta l'intera figura AMDB ne' suoi elementi BD, NM &c. paralleli alla base, e perciò perpendicolari all'asse comune AC, si prolunghino le CD, PM in maniera, che sia $DE = BC$, $MQ = PN$, e così da per tutto; il risultato di tali somme farà l'area AQEC eguale manifestamente alle due aree ADC, ACB; imperciocchè essendo per la costruzione la MQ eguale alla contrapposta PN, la DE eguale alla contrapposta BC, e così discorrendo di tutti gli altri elementi equinumerici, tutta l'area AMDEQA farà eguale a tutta l'area ACB; onde posta di comune l'area ADC, farà l'area AQEC eguale all'area ADC, ACB; il che &c.

S C O L I O I.

223. Che l'area AMDEQA eguagli l'area ACB, si può dimostrare ancora coll' eccellente metodo delle infinita-

O o

men-

mente prossime; imperciocchè tirata alla $NPMQ$ l'infinitamente prossima $npmq$, si dimostrerà facilmente, essere ogni areola $MmqQ$ eguale all'areola corrispondente $PNnp$, e in conseguenza tutta l'area $AMDEQA$ eguale a tutta l'area ACB .

COROLLARIO I.

224. Se faranno due o più aree curvilinee, ovvero più aree rettilinee, e curvilinee dell'istess'altezza, è chiaro, che si potrà costruire col medesimo facil metodo un'area eguale alla loro somma.

COROLLARIO II.

225. Quindi ravvisasi, esser ancora molto facile il costruire una figura, la di cui area sia la differenza di due, o più aree rettilinee, e curvilinee date, che abbiano la medesima altezza; imperciocchè siano le figure ACB , AEC intorno all'asse comune AC ; risolvansi ne' loro elementi, o componenti BE , NQ , e dalla EC tolta la $ED = BC$, come ancora recisa dalla PQ la $QM = PN$, e così sempre, rimarrà la figura $AMDC$, che farà la differenza delle date figure AEC , ACB .

COROLLARIO III.

226. E' dunque facilissimo il trovar l'equazione alla figura curvilinea insorta dal sommare, o sottrarre più figure

re rettilinee, e curvilinee di nota equazione, le quali abbiano la medesima altezza; imperciocchè se la figura AEC farà la somma delle figure ADC, ACB, avremo $CE = BC + CD$; e se la figura ADC è la differenza delle figure AEC, ACB, s'avrà $CD = CE - CB$; quali due equazioni, quantunque sembrino a prima vista ridicole, portano ad inaspettate conseguenze.

COROLLARIO IV.

227. In fatti data la natura delle figure ADC, ACB, e sostituiti all'applicata CE i valori in termini della corrispondente ascissa AC, si avrà l'equazione alla data figura AEC, la di cui quadratura s'otterrà sempre, quando quadrabili siano le due figure componenti ADC, ACB. Così se ACB sia un triangolo rettangolo isoscele, e la AMD una Parabola Apolloniana rivolta con la concavità all'asse, l'equazione alla curva AE in caso di somma farà $CE = AC + \sqrt{AC}$, ovvero $PQ = AP + \sqrt{AP}$; e in caso di differenza l'equazione alla curva AD farà $PM = AP - \sqrt{AP}$, supposto, che la curva AE sia una Parabola Apolloniana concava verso l'asse AC. Che se la detta Parabola AD rivolgesse la convessità all'asse AC, allora l'equazione alla curva AE in

caso di somma farebbe $PQ = AP + \overline{AP}^2$; e se la Parabola del medesimo genere AE fosse convessa verso il medesimo asse, l'equazione alla curva AD in caso di differenza farebbe

PM = $AP - \overline{AP}^2$; onde la quadratura della curva AE

O o 2

nel

nel primo caso di somma farebbe $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 + \frac{2}{3}\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$ (109. 57.),
 nel secondo $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 + \frac{1}{3}\overline{AP}^3$ (85. 57.); e la quadratura della curva AD nel primo caso di differenza farebbe $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 - \frac{2}{3}\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$, nel secondo $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 - \frac{1}{3}\overline{AP}^3$. Il medesimo congegno si usi quando le figure sommabili, o sottraibili sono più di due.

COROLLARIO V.

228. Per costruir dunque una data equazione, basta supporre, che ciascuno membretto, che la forma, sia eguale ad un'applicata; indi poste tali applicate per diritto in maniera, che formino una retta, facciasi, che tal retta sia normale ne' luoghi congrui ad una comune ascissa, e così sempre; questa retta toccherà con l'estremità la curva richiesta; ex. gr. sia la data equazione $PQ = AP + \sqrt{AP}$; facciasi $PN = AP$, che farà al triangolo rettangolo isoscele APN, poscia proseguiscasi a fare $PM = \sqrt{AP}$, che farà alla Parabola Apolloniana, sicche posta la $MQ = PN$ per diritto alla PM, e formatane la PQ normale alla comune ascissa AP, questa PQ farà un'applicata, ovvero un'elemento della curva richiesta, e però procedendo in tal guisa, verrà costrutta la curva AQ. Ciò, che s'è detto della data equazione, si può applicare ad altra equazione contenente maggior numero di membretti.

Co.

COROLLARIO VI.

229. Data poi un'equazione, per ottenerne la quadratura, basta assegnare a ciascun membretto un'equazione a parte, e riflettere, se le figure indicate da tali particolari equazioni siano suscettibili di quadratura; che se si troveranno quadrabili, la loro somma, o la loro differenza darà l'area espressa dall'equazione proposta; ex. gr. l'equazione pro-

posta sia $PQ = AP \pm \overline{AP}^2$; fatto $PN = AP$, $PM = \overline{AP}^2$, vedesi, che la prima equazione è al triangolo rettangolo equicrura, la seconda alla Parabola Apolloniana rivolta con la convessità all'asse; onde la quadratura da tal equazione indicata sa-

rà $\frac{1}{2} AP \pm \frac{1}{3} \overline{AP}^3$ (85. 57.).

COROLLARIO VII.

230. L'equazione dunque alla data figura mostrerà tutte quell'aree rettilinee, e curvilinee, la somma o sottrazione delle quali viene impiegata in formare l'area totale, che vuol quadrarsi; e l'occhio stesso farà giudice, senza venire a nuove attuali equazioni, di qual carattere sia l'area espressa da ciascun membretto considerato a parte.

Co.

COROLLARIO VIII.

231. Detta dunque al solito PM l'applicata, AP l'ascissa, e supposto, che vi sia l'equazione generale $PM =$

$a\overline{AP}^m \pm b\overline{AP}^n \pm c\overline{AP}^r$ &c., intendendo per a, b, c i coefficienti di ciascun termine, e per m, n, r numeri interi, o rotti, positivi, o negativi quali si vogliano, l'area curvilinea espressa da tal equazione continuata a piacere sarà sempre costruibile, e quadrabile; giacchè tutte l'aree rettilinee, e curvilinee particolari, che s'interessano a formarne l'intero, sono riducibili a triangoli rettangoli isosceli, o a Parabole quando gli esponenti sono positivi, e ad Iperboli tra gli asintoti quando sono negativi; quali figure, s'è veduto, esser tutte quadrabili, eccetto l'Iperbole comune tra gli asintoti (92. 109.).

COROLLARIO IX.

232. Si può dunque trovare la formula generale per la quadratura delle curve incluse nell'antecedente equazione;

imperciocchè siccome l'equazione $PM = \overline{AP}^n$ comprende tutte le Parabole, e tutte le Iperboli tra gli asintoti, la qua-

dratura delle quali è $\frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1}$ (85. 92. 57.), così l'area cur-

vilinea espressa da qualunque membretto \overline{AP}^r sarà $\frac{\overline{AP}^{r+1}}{r+1}$; e
se

se un tal membretto fosse $\frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$, l'area, che rappresenta, farà $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; e se fosse $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, l'area, che indica, farà $\frac{n}{m+n} \overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$. Donde ricavasi la regola fondamentale delle quadrature; cioè *accreascasi d'una unità l'esponente della data variabile; indi questa medesima variabile così preparata dividasi per il medesimo esponente accresciuto d'una unità; una tale operazione darà la misura dell'area, che si desidera.*

COROLLARIO X.

233. Quando un membretto abbia la formula $(1+AP)^{\frac{m}{n}}$, in cui m sia positivo, o negativo, intero, o rotto, indicherà sempre un'area quadrabile, giacche tal area riducesi ad una Parabola troncata, ovvero ad un' Iperbole tra gli asintoti pur troncata. In fatti sia EM (Fig. 71. 72. 73.) una Parabola, o un' Iperbole tra gli asintoti VC, CD, il di cui asse CD, e la di cui equazione $\overline{CP}^m = \overline{PM}^n$; taglifi dalla CD una quantità costante CA, che per brevità sia 1. farà $CP = 1+AP$, e si avrà l'equazione $PM = (1+AP)^{\frac{m}{n}}$; onde la sua quadratura per il corollario antecedente sarà $\frac{n}{m+n} (1+AP)^{\frac{m+n}{n}}$, e la quadratura dello spazio AEMP sarà $\frac{n}{m+n} (1+AP)^{\frac{m+n}{n}} - \frac{n \times 1}{m+n} \frac{m+n}{n}$. Quando dunque il membretto

to $(1+AP)^{\frac{m}{n}}$ si dovesse sommare con un altro membretto della data equazione affetto della quantità AP , o defalcare dal medesimo, la quantità da sommarfi, o da defalcarsi farebb'el'area $AEMP$; ex. gr. se l'equazione fosse $PQ =$

$\overline{AP}^{\frac{r}{n}} \pm (1+AP)^{\frac{m}{n}}$, la quadratura dell'infinite curve compresi farebbe $\frac{\overline{AP}^{\frac{r}{n}+1}}{r+1} \pm \frac{n}{m+n} (AP+1)^{\frac{m+n}{n}} + \frac{-n > 1}{m+n} \frac{m+n}{n}$; perche

fatto r positivo a titolo d'esempio, il membretto $\overline{AP}^{\frac{r}{n}}$ denoterà una Parabola AN ; ma debbono amendue l'aree da sommarfi, o da sottrarsi avere la medesima altezza AP ; dunque tal somma, o tal sottrazione si dovrà fare tra lo spazio troncato Parabolico, o Iperbolico $AEMP$, e lo spazio Parabolico intero ANP , ovvero tra lo spazio $AEBD$, e lo spazio AFD . E perciò se la curva EB (*Fig. 73.*) sarà un'Iperbole Apolloniana tra gli asintoti, il suo spazio $AEBD$ si esprimerà co'logaritmi iperbolici (68. 70.) riducibili anch'essi a logaritmi comuni.

COROLLARIO XI.

234. Quando poi un membretto avesse la formula

$(1-AP)^{\frac{m}{n}}$, indicherà anch'esso una Parabola troncata, o un'Iperbole tra gli asintoti pur troncata (quando m non fosse eguale a n , mentre allora denoterebbe un triangolo isos-

PARTE SECONDA, CAPITOLO III. 297

foscele), la di cui quadratura si troverà in una maniera simile a quella del Corollario precedente; imperciocchè sia EM (Fig. 74. 75.) una Parabola, o un' Iperbole tra gli asintoti, il di cui asse AP, e la di cui equazione $PM =$

$\overline{PD}^{\frac{m}{n}}$, fatta la AD costante, e supposta l'origine dell'ascissa AP in A, farà $PD = 1 - AP$; sicchè l'equazione diverrà

$PM = (1 - AP)^{\frac{m}{n}}$, la di cui quadratura farà $\frac{n}{m+n} (1 - AP)^{\frac{m+n}{n}}$,

e in conseguenza lo spazio AEMP farà

$\frac{n}{m+n} \times 1^{\frac{n}{n}} - \frac{n}{m+n} (1 - AP)^{\frac{m+n}{n}}$; volendosi adunque sommare, o

sottrarre il membretto $(1 - AP)^{\frac{m}{n}}$ con un altro membretto, la somma, o la sottrazione si eseguirà riguardo al trapezoide AEMP con un'altra area d'egual altezza AP, nel modo esposto nel precedente Corollario, essendo la PM sempre riferita alla AP. Ed intanto osservarsi, che tanto in questo, che nell'antecedente Corollario la quantità costante AD, ed i parametri delle curve EM suppongonsi tacitamente eguali; altrimenti converrebbe farne la distinzione.

COROLLARIO XII.

235. Se tra gli accennati membretti ve ne fosse uno formato da una sola quantità costante, è chiaro che rappresenterà un rettangolo avente per altezza l'ascissa, e per ba-

P p

se

se la detta quantità costante; il medesimo intendasi, se vi fossero più membretti risultanti di sole quantità costanti di grandezza diversa.

COROLLARIO XIII.

236. Se uno di tali membretti contenesse oltre la AP una sola variabile da essa AP diversa, indicherà un triangolo rettangolo Scaleno della comune altezza AP; il medesimo dicasi di più membretti, ognuno de' quali contenga una sola variabile diversa da quella dell'altro; ex. gr. sia l'e-

quazione $PM = \overline{AP}^3 + nV + X - Z$, in cui le V, X, Z significino tante variabili fra loro diverse; la quadratura

di tal curva sarà $\left(\frac{1}{2}\overline{AP}^3 + nV + X - Z\right) \propto \frac{1}{2}AP$; e se fosse

l'equazione $PM = V + X - Z$, e che si sapesse, che l'altezza comune fosse indicata dalla V, la quadratura della figura rappresentata da tal equazione farebbe $(V + X - Z) \propto \frac{1}{2}V$.

COROLLARIO XIV.

237. Quando tra i membretti quadrabili se ne diano de' non quadrabili, l'equazione speciale a ciascuno di essi additerà la natura delle curve, dalle quali la total quadratura della quantità data dipende.

Co-

COROLLARIO XV.

238. Se tra i membretti d'un'equazione ve ne fossero di quelli, che contenessero quantità complesse sotto un segno radicale, e che l'equazioni particolari a ciascuno di tali membretti si potessero costruire a foggia de' luoghi Geometrici, ogni area da tali particolari equazioni rappresentata farà in tutto, o in parte quadrabile, quando appartenga a figure in tutto, o in parte quadrabili; onde potrà sommarfi con le quantità indicate dagli altri membretti, o da esse detrarfi; il che apre un vastissimo campo tanto per la quadratura, quanto per la costruzione delle curve, quando l'ostacolo provenga da segni radicali, contenenti varietà d'indeterminate.

S C O L I O II.

239. Io quì non intendo di parlare di que' luoghi Geometrici, che riguardano la combinazione di due curve per il ritrovamento delle radici, ma di quei luoghi, che riguardano una sola figura ad imitazione di quelli del secondo grado costruibili alle sezioni Coniche; dissi ad imitazione; perchè se ne possono con simil metodo costruire degli altri a curve di grado superiore al secondo. Volendo dunque servirsi del presente metodo relativamente a' menzionati luoghi Geometrici, basta immaginarsi, che all'altezza comune, a cui son riferiti i membretti della data equazione da costruirsi, o

P p 2

da

da quadrarsi, siano convenientemente poste a perpendicolo quelle rette, che nel luogo Geometrico costruito fanno figura d'applicate.

Così se in un luogo Geometrico costruito le coordinate fossero LN, NQ (*Fig. 76. 77. 78.*), basta, che tutte le NQ, che fanno figura d'applicate, si suppongano poste ad angoli retti al medesimo livello dell'altezza comune; ex. gr. l'altezza comune, a cui riferiscono i membretti della data equazione da costruirli, o da quadrarsi, sia AP (*Fig. 79.*), intorno a cui per effettuare il primo membretto di detta data equazione, supponasi già descritta la curva AM; presa LB (*Fig. 76.*), ovvero DN (*Fig. 77.*), ovvero LN (*Fig. 78.*) = AP, facciasi MR = NQ, e così sempre, l'area ASRP eguaglierà l'area AMP, LNQ (*Fig. 76.*), ovvero l'area ATRP (*Fig. 79. 77.*) eguaglierà l'area AMP, DGQN, ovvero (*Fig. 79. 78.*) l'area AMP, LNQO, quali se saranno quadrabili, o geometricamente costruibili, farà ancora quadrabile, o geometricamente costruibile la figura ASRP, ovvero ATRP indicata dalla data equazione. Vengasi ad un caso speciale, assumendo per maggior comodo i caratteri algebrici.

Se fosse proposta l'equazione principale $v = \sqrt{\left(\frac{a^2 x^2}{b} - \frac{a^2 x^2}{4b^2} + cx\right)}$
 $+ \sqrt{(ay + bx - cc)} - \sqrt{(bx + cx - x^2)}$ &c. l'equazione particolare del primo membretto, in cui z faccia figura d'ap-

pli-

plicata farà $z = \sqrt{\left(\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{4b^2} + cx\right)}$, ovvero $zx - \frac{a^2x}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, la di cui costruzione è un luogo alla Parabola, come nella *fig. 76.*, dove un triangolo LNB resta aderente all'asse LB della Parabola Conica LQB; presa dunque (*Fig. 80. 76.*) nell'asse nominato la LB per altezza comune, la NQ farà l'infima applicata, che effo primo membretto darà per costruire la prima figura dell'equazione principale supposta; onde fatto $AP = LB$, $PM = NQ$, e così sempre, l'area AEMP eguaglierà l'area LNQ, che è quadrabile.

L'equazione particolare del secondo membretto, in cui la y denoti l'applicata, farà $y = \sqrt{(ay + bx - cx)}$, ovvero $y^2 - ay - bx + cx = 0$, il luogo della qual'equazione appartiene nuovamente alla Parabola Conica DNQ (*Fig. 77.*); sicche presa $DN = AP$ (*Fig. 80. 77.*), la NQ farà l'infima applicata da porfi a perpendicolo full'altezza comune; fatta dunque $MR = NQ$, $AF = DG$, e così da pertutto, l'area AEMRF eguaglierà l'area DGQN, di cui pure è reperibile la quadratura.

L'equazione poi del terzo membretto, in cui la s rappresenta l'applicata, farà $s = \sqrt{(bs + cx - xx)}$, ovvero $s^2 + x^2 - bs - cx = 0$, onde il luogo farà al cerchio; quindi preso $LN = AP$ (*Fig. 78. 80.*), e fatto $RT = NQ$, $FS = LO$, e così sempre, l'area FRTS eguaglierà l'area LNQO, la di cui quadratura dipende da quella del cerchio.

In tal guisa farà eseguita la costruzione di tutta la figura PAST (*Fig. 80.*) indicata dalla data equazione principi-

cipale, la quadratura della qual figura dipende, come si è veduto, in parte dalla quadratura della Parabola Conica, o Apolloniana, e in parte da quella del cerchio. Vedasi il Wolfio ne' Luoghi geometrici ^(a), donde ho ricavato per altrui maggior facilità le predette formule. E tanto basti aver detto per mettere i luoghi geometrici Cartesiani a parte del calcolo riguardante le quadrature.



CA-

(a) *Elem. Math. Univ. T. I. P. I. [sect. II. Cap. VII.*

CAPITOLO QUARTO.

Del Metodo diretto , ed inverso appartenente agl' INDIVISIBILI .

..*..*..*..*..*..*..*..*..*..*..*..*

DEFINIZIONE XI.

240. **I**NDIVISIBILE, ELEMENTO o COMPONENTE d' un tutto, o d' un intero chiamo una delle innumerabili quantità fra loro equidistanti, o fra loro omogenee, nelle quali un tal tutto può esser risoluto .

DEFINIZIONE XII.

241. COMPOSTO , o SOMMA chiamo quel tutto, che possono formare i detti Indivisibili, o Componenti, messi insieme .

S C O L I O I.

242. Sia ex. gr. la figura piana BAD (*Fig. 81.*); suoi Indivisibili faranno gli archi innumerabili BAD, *bPd*, *bpd* fra loro equidistanti, che presi tutti insieme riempiono , e formano la detta figura, che è il loro composto , o la loro som-

somma. Similmente posta BD per sua base, suoi Indivisibili faranno le MPM, *mpm* &c. parallele ad essa base, e in conseguenza fra loro; ovvero suoi Indivisibili faranno i Settori ACE, ECF, FCM &c., che per esser figure triangolari possono chiamarsi per questo verso omogenee.

Che se la detta figura BAD rappresentasse un solido, i suoi Indivisibili farebbero le sfoglie equidistanti rappresentate in profilo dagli archi suddetti *bPd*, *bpd*; ovvero tutti i piani paralleli con la base, e in conseguenza tra loro, che passano per le MPM, *mpm* &c., e che sono limitati dalla superficie del solido; ovvero tutte le Piramidi, o Coni inassegnabili ACE, ECF, FCM &c.

Più comodi poi, e più adattati all'uso, tanto nelle figure piane, che solide, sono gl' Indivisibili MPM, *mpm* &c. paralleli alla base, ed insieme perpendicolari all'asse AC.

COROLLARIO I.

243. Gl' Indivisibili adunque di qualunque figura piana, o solida (eccettuando nelle prime ogni rettangolo, o romboide, nelle seconde ogni parallelepipedo) dovranno esser continuamente accresciuti, o diminuiti secondo il bisogno, acciò essa figura ne risulti, e perciò faranno quantità continuamente variabili. Così riguardo alle coordinate d'una figura potranno essere aumentate l'ascisse, mentre faranno aumentate l'applicate; e potranno essere aumentate l'ascisse, mentre l'applicate faranno diminuite, e viceversa.

Co-

COROLLARIO II.

244. Dunque l'indivisibile di tali quantità variabili farà la loro minima differenza; cioè supposto, che le due applicate PM , pm siano poste l'una accanto all'altra, o siano infinitamente prossime, e parallele, e che da un punto estremo M sia tirata la Mo parallela all'asse AP , la differenza om farà l'indivisibile di tali applicate, perchè messi insieme per diritto tali quantità omogenee formano un'intera applicata. Per tal ragione la piccolissima quantità Pp , che è la differenza delle due porzioni AP , Ap dell'ascissa corrispondenti alle dette applicate PM , pm , farà l'indivisibile di detta ascissa; e l'archetto Mm compreso tra l'intervallo delle menzionate due applicate PM , pm farà l'indivisibile dell'arco intero AM . &c.

COROLLARIO III.

245. Se tra tutte le variabili di qualunque specie, che concorrono alla conformazione d'una figura, vi saranno mescolate delle quantità costanti; e se vogliansi ridurre a computo gl'indivisibili di ciascuno di tali ingredienti; è chiaro, che l'indivisibile delle quantità costanti farà eguale a zero; perchè essendo l'indivisibile d'una quantità l'istessa cosa che il dato incremento, o decremento, l'indivisibile d'una quantità non suscettibile di cangiamento deve esser nullo.

Q q

SCO-

S C O L I O II.

246. Nel Cerchio, e nella Parabola per esempio, per quanto s'iano continuamente variabili l'ascissa, e l'ordinata, il Diametro nel primo, e il Parametro nella seconda si conservano sempre immutabili.

COROLLARIO IV.

247. Giacchè gl'indivisibili indicati da una retta variabile (come quelli d'una figura piana) debbono esser tutti della medesima latitudine, non essendovi ragione, per cui uno debba aver maggior latitudine dell'altro, gl'indivisibili dell'ascissa essendo formati dal segamento d'un'ordinata, dovranno esser tutti eguali; onde l'indivisibile di qualunque ascissa si potrà come costante porre $= 1$.

COROLLARIO V.

248. Non si potrà dir così degl'indivisibili dell'ordinate, i quali non nascendo in tal guisa, variano, com'è manifesto, continuamente al variare dell'ambito di quella figura, che riempiono.

Co:

COROLLARIO VI.

249. Se l'applicate faranno eguali all'ascisse, come nel triangolo rettangolo equicure, gl' indivisibili tanto dell' ascissa, che dell' applicata faranno da per tutto l' istessa cosa; onde ognuno di loro nel detto triangolo può farsi $= 1$.

PROPOSIZIONE XIV.

250. Dato il composto, o data la somma, trovarne il componente, o sia l' indivisibile.

Suppongasi, che la data somma sia eguale ad un' applicata PM (Fig. 24. 29. 30. 31. 32. 33. 34.) d'una figura APM; divisa la detta applicata PM per la sottangente PT, il quoziente darà il valore, che si cerca.

Imperciocchè, supposta la costruzione come sopra (78.), PN è l' indivisibile della figura ADNP (240. 242.); ma la somma della PN, o sia l' aggregato di tutti gl' indivisibili componenti tal figura ADNP, vale a dire la figura istessa, è $PT \times PN = PM$ (76.); dunque PN, ch'è l' indivisibile della quantità $PT \times PN$, farà ancora l' indivisibile della PM; ma $PN = \frac{PM}{PT}$; dunque data la somma PM, il suo indivisibile farà $\frac{PM}{PT}$; il che &c.

COROLLARIO I.

251. Dunque all'indivisibile om (*Fig. 81.*) di un' applicata PM si potrà ad un bisogno sostituire il quoziente nato dall'applicata divisa per la sotttangente.

COROLLARIO II.

252. Essendo $PT = \frac{PM}{PN}$, (*Figure suddette*), ne verrà, che la sotttangente d'una figura farà il quoziente nato dalla partizione dell'applicata per il suo indivisibile.

ESEMPIO I.

253. Debbaſi trovare l'indivisibile ad una quantità costante $= 1$; l'equazione farà $PM = 1$, che è alla linea retta; ma questa non è ſuſcettibile nè d'applicata, nè di ſotttangente; dunque una quantità coſtante non ammette indiviſibile; che è quanto dire, l'indivisibile d'una quantità coſtante è eguale a zero, come ſopra (245.)

ESEMPIO II.

254. Sia richiesto l'indivisibile d'un' aſciſſa qualunque AP (*Fig. 6.*); tirata al ſolito all'applicata PM l'inſinitamente profiſſa pm , indi condotte la Mo parallela alla AP , e la MT tangente in M , ſi avrà l'analogia $Mo : mo :: PT : PM$; onde

de $Mo = Pp = \frac{mo \times PT}{PM}$; ma $mo = \frac{PM}{PT}$, dunque $Pp = \frac{PT \times PM}{PT \times PM} = 1$.

COROLLARIO.

255. Dunque l'indivisibile di qualunque ascissa è sempre la medesima quantità, come s'era quì sopra stabilito (247.); onde tant'è considerare l'applicata da per se sola, quanto moltiplicata nell'indivisibile dell'ascissa.

S C O L I O.

256. Dopo che si dimostrò, esser l'indivisibile dell'ascissa $= 1$. (247.), si poteva in primo luogo trovare addirittura l'indivisibile d'una data variabile; considerandola come applicata d'una figura; imperciocchè all'applicata PM (Fig. 6.) della figura AMP tirata l'infinitamente prossima pm ; indi dal punto M condotta la Mo parallela alla AP, farebbesi coll'analogia $PT:PM::1:om$ dimostrata la $om = \frac{PM}{PT}$, come sopra (250.); in secondo luogo si poteva dimostrare, esser l'indivisibile d'una quantità costante $= 0$; poi che nel rettangolo ACB (Fig. 82.) considerata la AP come ascissa, e tirata all'applicata PM l'infinitamente prossima pm , nel volervi adattare l'antecedente analogia, si farebbe trovato, essere $mo = 0$; ma siccome la detta dimostrazione, che l'indivisibile d'un'ascissa sia $= 1$, era più metafisica, che geometrica, così ho stimato necessario il tornar ciò a dimostrare con tutto il rigore geometrico.

E-

E S E M P I O III.

257. Sia proposto l'indivisibile della quantità $\sqrt{(1 \pm \bar{AP}^2)}$; fatta l'equazione $PM = \sqrt{(1 \pm \bar{AP}^2)}$, vedesi, che col segno negativo è al cerchio, e col positivo all'Iperbole equilatera, computate l'ascisse dal centro; ma in amendue queste curve la fottangente è terza proporzionale dopo l'ascissa, e l'applicata (27. N. 1.); dunque l'indivisibile richiesto sarà

$$\pm AP \propto \frac{\sqrt{(1 \pm \bar{AP}^2)}}{1 \pm \bar{AP}^2} = \frac{\pm AP}{\sqrt{(1 \pm \bar{AP}^2)}},$$
E S E M P I O IV.

258. Se vogliasi l'indivisibile della quantità $\sqrt{(Q \times AP \pm Q \times \bar{AP}^2)}$, si avrà l'equazione $PM = \sqrt{(Q \times AP \pm Q \times \bar{AP}^2)}$, ovvero $\bar{PM}^2 = Q \times AP \pm Q \times \bar{AP}^2$, che col segno negativo è all'Ellisse, col positivo all'Iperbole, nelle quali il maggior asse = 1, e il parametro = Q; ma in amendue tali curve la fottangente è $\frac{2AP \pm 2\bar{AP}^2}{1 \pm \bar{AP}^2}$; dunque l'indivisibile cercato sarà

$$\frac{(1 \pm 2AP) \propto \sqrt{Q}}{2\sqrt{(AP \pm \bar{AP}^2)}}.$$

Co:

COROLLARIO.

259. Quindi se gli assi sono eguali, cioè se anche $Q = 1$ (nel qual caso l'equazione si converte col segno negativo al cerchio, e coll'affermativo all'Iperbole equilatera, computate l'ascisse dal vertice), l'indivisibile della quantità

$$\sqrt{(AP \pm AP^2)} \text{ sarà } \frac{1 \pm 2AP}{2\sqrt{(AP \pm AP^2)}}.$$

E S E M P I O V.

260. Se si brami l'indivisibile della quantità $\frac{\sqrt{(2AP - AP^2)}}{AP}$,

fatto $PM = \frac{\sqrt{(2AP - AP^2)}}{AP}$, vedesi, che l'equazione è alla Ver-
siera Grandiana (29.). Sia questa pertanto BM (Fig. 8.),
il di cui cerchio genitore ANB, che ha per raggio AC = 1;

giacchè la di lei sottangente $PT = \frac{-(2AC \times AP \cdot AP^2)}{AC}$ (l. cit.),

l'indivisibile della proposta quantità sarà $\frac{-PM \times AC}{2AC \times AP - AP^2}$; ma

$$PM = \frac{PN \times AB}{AP} = AB \times \frac{\sqrt{(2AC \times AP \cdot AP^2)}}{AP}; \text{ dunque il deside-}$$

rato indivisibile sarà $\frac{-AB \times AC}{AP \times \sqrt{(2AC \times AP \cdot AP^2)}}$; cioè per essere AC

$$= 1; \text{ sarà } \frac{-2}{AP \times \sqrt{(2AP - AP^2)}}.$$

Co:

COROLLARIO.

261. Se la data quantità, di cui voleasi l'indivisibile; fosse stata $\frac{\sqrt{(AP-\overline{AP}^2)}}{AP}$, allora essendo $AB = 1$, $AC = \frac{1}{2}$, il suo indivisibile sarebbe stato $\frac{-1}{2AP \pm \sqrt{(AP-\overline{AP}^2)}}$.

E S E M P I O VI.

262. Convenga trovare l'indivisibile alla somma \overline{AP}^n , e sia n un numero qualunque intero, o rotto positivo, o negativo; l'equazione $PM = \overline{AP}^n$, ovvero $\overline{PM}^{\frac{1}{n}} = AP$ farà all' infinite Parabole, o all' infinite Iperboli tra gli asintoti, la tangente delle quali è $\frac{1}{n} AP$; onde avrassi $\frac{PM}{PT} = n \overline{AP}^{n-1}$; che farà l'indivisibile richiesto.

COROLLARIO I.

263. Se alla quantità $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$ si dovesse trovare l'indivisibile, questo farebbe $\frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{\overline{AP}^{m-n}}$; se la data quantità fosse \overline{AP}^{m+1} , il suo indivisibile farebbe $(m+1) \overline{AP}^m$.
Co-

COROLLARIO II.

264. L'indivisibile dell'ascissa AP è 1 (247. 254.); l'indivisibile di \overline{AP}^2 è $2AP \times 1$; l'indivisibile di \overline{AP}^3 è $3\overline{AP}^2 \times 1$; e in generale l'indivisibile di \overline{AP}^n è $n\overline{AP}^{n-1} \times 1$; dal che ricavasi la Regola I. fondamentale per il calcolo degl'indivisibili, vale a dire 1.) si moltiplichi la data variabile nel suo esponente; 2.) se le lasci il detto esponente diminuito d'una unità; 3.) si moltiplichi nuovamente tal quantità così preparata nell'indivisibile di detta variabile, considerandola come se avesse l'unità per esponente; tale operazione darà il richiesto indivisibile. Così l'indivisibile della quantità $\overline{AP}^m \pm (\overline{AP} \pm \overline{AP}^r)^{\frac{t}{n}}$ sarà $m\overline{AP}^{m-1} \pm \frac{t}{n} (\overline{AP} \pm \overline{AP}^r)^{\frac{t}{n}-1} \times (1 \pm r\overline{AP}^{r-1})$.

S C O L I O

265. Se si considera l'istessa Parabola ora rivolgente la convessità, ora la concavità all'asse, si vedrà, che quella, che nel primo caso fa figura d'ascissa, nel secondo si converte in applicata; ma in amendue i casi i loro indivisibili si trovano con l'istessa menzionata regola fondamentale; dunque a tal legge è sottoposta tanto l'una, quanto l'altra delle coordinate d'una figura; il che può ancora dimostrarsi nella seguente maniera, che somministra un altro metodo per

R r

fon-

fondare l'antecedente regola. L'indivisibile dell'ascissa AP è

$AP + Pp - AP$ (Fig. 6.); onde l'indivisibile \overline{Pp}^2 farà $(AP + Pp)^2$

$- \overline{AP}^2 = \overline{AP}^2 + 2 AP \times Pp - \overline{AP}^2$ (11.) $= 2 AP \times Pp$; e

proseguendo con tal ordine si troverà dopo alquante opera-

zioni, che l'indivisibile d'una variabile \overline{AP}^n è $n \overline{AP}^{n-1} \times Pp$

$= n \overline{AP}^{n-1}$ (254.); nell'istessa guisa si troverà, che l'indivi-

sibile della \overline{PM}^n è $n \overline{PM}^{n-1} \times om = n \overline{PM}^{n-1} \times \frac{PM}{PT}$ (250.) $= \frac{n \overline{PM}^n}{PT}$.

PROPOSIZIONE XV.

266. Trovar l'indivisibile, o elemento di qualunque pro-
dotto formato da una variabile, ed una costante, o da due va-
riabili vicendevolmente moltiplicantisi.

Supposta intorno l'asse AP (Fig. 83.) una figura qua-
lunque ABC, e presa nel detto suo asse una quantità co-

stante AC = 1, facciasi $\overline{AC} : \overline{AP}^n :: PN : PM$, e così sempre,
ne nascerà la figura AMDC, la di cui equazione sarà PM

$= PN \times \overline{AP}^n$; onde sostituirsi a PN gli equivalenti in termi-
ni di AP, o viceversa, si troverà l'indivisibile della quanti-

tà $PN \times \overline{AP}^n$, dividendo la PM per la sottrangente PT (250.);
il che &c.

Co.

COROLLARIO I.

267. E' manifesto, che la detta analogia si può variare a piacere per la formazione della figura AMDC.

COROLLARIO II.

268. Se la figura ACB sia un quadrato, la figura AMD farà una Parabola rivolgente la convessità all'asse quando n sia un numero positivo intero, e la concavità quando un tal numero sia rotto; e farà un' Iperbole tra gli asintoti quando n sia un numero qualunque negativo; onde l' indivisibile del prodotto $PN \times \overline{AP}^n$, cioè del prodotto \overline{AP}^n , farà $\frac{\overline{AP}^n}{\overline{AP}} = \overline{AP}^{n-1}$ come sopra (262.).

COROLLARIO III.

269. Se si fosse fatto $\overline{AC}^m : \overline{AP}^m :: \overline{PN}^n : \overline{PM}^n$, l'equazione alla figura ADC farebbe stata $\overline{PM} = \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, sicche l' indivisibile della variabile $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$ farebbe $\frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m}{n}-1}$, come sopra (263.).

COROLLARIO IV.

270. Se la figura ACB suppongasi essere un rettangolo, e facciasi $\overline{AC}^m : \overline{AP}^m :: \overline{PN}^n : \overline{PM}^n$, l'equazione all' infortane figura

R 1 2

gura ADC farà $PM = PN \times \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; onde l'indivisibile del prodotto $PN \times \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, si troverà essere $\frac{m}{n} PN \times \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$; il che dimostra, che le quantità costanti mescolate con le variabili di qualunque grado non alterano l'enunciata regola fondamentale (264.); ed esse quantità costanti restano sempre inalterabili, non soffrendo altri cambiamenti, eccetto quelli, che dipendono dalle leggi ordinarie del calcolo.

COROLLARIO V.

271. Se la figura ACB (Fig. 83.) sia un triangolo rettangolo isoscele ne' lati AC, CB, e facciasi $\overline{AC}^{\frac{m}{n}} : \overline{AP}^{\frac{m}{n}} :: \overline{PN}^{\frac{m}{n}} : \overline{PM}^{\frac{m}{n}}$, l'equazione alla figura ADC farà $PM = \overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$ nuovamente all'infinita Parabole, o Iperboli tra gli asintoti, onde l'indivisibile di $\overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$ farà $\frac{m+n}{n} \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$.

COROLLARIO VI.

272. Se il detto triangolo rettangolo ACB non fosse isoscele, ma scaleno, e fosse fatta l'analogia $\overline{AC}^{\frac{m}{n}} : \overline{PN}^{\frac{m}{n}} :: \overline{AP}^{\frac{m}{n}} : \overline{PM}^{\frac{m}{n}}$, l'equazione alla data figura ADC sarebbe $PM = \overline{PN} \times \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$;

$\times AP$; onde giacche $AP \times \overline{PN}^m$ sta come \overline{AP}^{m+1} , la figura ADC farà di nuovo una dell'infinite Parabole, o dell'infinite Iperboli tra gli asintoti, e però l'indivisibile di $\overline{PN}^m \times AP$ farebbe $(m+1) \frac{PM}{AP} = (m+1) \frac{\overline{PN}^m \times AP}{AP} = (m+1) \frac{\overline{PN}^m}{PN}$.

S C O L I O ,

273. Fatto $m = 1$, l'indivisibile di $AP \times PN$ farà $2PN$, e l'indivisibile di $\frac{1}{2} AP \times PN$ farà PN ; sicche viceversa la somma di $2PN$ farà $AP \times PN$, e la somma di PN farà $\frac{1}{2} AP \times PN$, quando la PN riferiscasi come applicata alla nota ascissa AP ; il che serve di conferma a ciò, che con altro metodo siera poch' anzi determinato (236). Con tal condizione la somma dell'indivisibile $(m+1) \overline{PN}^m$ farà $\overline{PN}^m \times AP$, il che è più manifesto nella caratteristica del calcolo infinitesimale, in cui secondo questi principj la somma della formula $(m+1) x^m dx \pm v^n dx \pm x^{r+1} dx$ &c. farebbe $x^{m+1} \pm \frac{v^{n+1}}{n+1} \pm \frac{x^{r+2}}{r+2}$ &c. vale a dire, si farà la somma secondo la legge fondamentale superiormente stabilita (232.), dividendosi ogni

318 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

ogni membretto di detta formula per l'esponente accresciuto dell'unità, ma si lascerà alla variabile, che accompagna la dx , il solito suo esponente, ed in vece d'accrescerlo dell'unità, si moltiplicherà la detta variabile così preparata in * somma di dx , qual dx deve in conseguenza cancellarsi.

PROPOSIZIONE XVI.

274. Trovar nuovamente l'indivisibile di due variabili scambievolmente moltiplicantisi.

Tali variabili sieno le due coordinate AP, PM d'una figura qualunque AM (Fig. 84.); tirata la pm infinitamente prossima all'applicata PM, facciasi per il punto M passare la oMB parallela all'ascissa AP, e dal punto m conducasi la mb parallela alla oB , che le farà ancora infinitesimi prossimi; è chiaro, che la somma de' due infinitesimi rettangoli Bom , PMo formerà l'indivisibile di ciò, che nasce dal moltiplicare insieme le due variabili AP, MP, e ciò in qualunque luogo dell'area curvilinea APM; onde insistendo sul metodo già accennato (265.), l'indivisibile del prodotto $AP \times PM$ farà $(AP + Pp) \times (PM + mo) - AP \times PM = AP \times PM + AP \times om + PM \times Pp + om \times Pp - AP \times PM = AP \times om + PM \times Pp$ (11.); il che &c.

COROLLARIO I.

275. Se le applicate scemassero al crescer dell'ascisse, allora la somma si converte in sottrazione; imperciocchè siccome l'indivisibile mo (Fig. 85.) dell'applicata PM v'è crescendo

do contrariamente a quello dell'ascissa AP, è manifesto, che dev'esser congiunto col segno negativo, e però in tal caso l'indivisibile del prodotto $PM \times AP$ farà $PM \times Pp + AP \times -mo$, cioè $PM \times Pp - AP \times mo$.

COROLLARIO II.

276. Quindi la Regola II. Si moltiplichi a vicenda una variabile nell'indivisibile dell'altra, e d'amendue tali prodotti facciasi la somma quando s'ano l'una, che l'altra di tali variabili vadano sempre crescendo; ma facciasi la differenza quando al crescer dell'una l'altra diminuisca; avvertendo, che il defalco cada dalla parte di quella, che va scemando; tale operazione darà l'indivisibile di due variabili scambievolmente moltiplicantisi.

COROLLARIO III.

277. Condotta dunque dal punto M (Fig. 84. 85.) la tangente MT, l'indivisibile del prodotto di due variabili farà generalmente secondo i posti principj (250. 254.) $PM + \frac{AP \times PM}{PT}$.

COROLLARIO IV.

278. Se si volesse l'indivisibile del prodotto d'una costante in una variabile, cioè se nel rettangolo AB (Fig. 82.) far.

fatta variabile la porzione AP del lato AC, e costante il lato BC, si cerchasse l'indivisibile del prodotto $AP \times BC$, ovvero $AP \times PM$, si troverà esser tale indivisibile $= PM \times Pp = PM$ (255.).

COROLLARIO. V.

279. Se la data figura fosse un triangolo rettangolo equicure ABC (Fig. 86.), l'indivisibile del prodotto $AP \times PM = \overline{AP}^2$ (replicando l'operazione fatta nella dimostrazione della presente Proposizione) farà $\overline{AP}^2 + 2AP \times Pp + \overline{Pp}^2 - \overline{AP}^2 = 2AP \times Pp + \overline{Pp}^2$; ma è certissimo per le dimostrazioni replicate fatte (261. 268.), che l'indivisibile di \overline{AP}^2 è $2AP \times Pp$; dunque farà $2AP \times Pp + \overline{Pp}^2 = 2AP \times Pp$; il che dimostra, che il quadrato d'un indivisibile, o sia d'una quantità inassegnabile deve esser nullo relativamente ad un prodotto d'una quantità assegnabile in una inassegnabile.

COROLLARIO VI.

280. Se la data figura fosse un triangolo rettangolo scaden ABC (Fig. 86.), l'indivisibile del prodotto $AP \times PM$ farebbe $AP \times om + PM \times Pp + om \times Pp$; ma $om = \frac{PM \times Pp}{PA}$; dunque $AP \times om = PM \times Pp$; e però il detto indivisibile sarà

PARTE SECONDA, CAPITOLO IV. 321

rà $2PM \times Pp + om \times Pp$; ma l'indivisibile di $AP \times PM$, s'è dimostrato, essere $2PM \times Pp$ (272. 273. 255.); dunque il rettangolo $om \times Pp$ delle due inassegnabili in confronto del prodotto d'una quantità assegnabile in una inassegnabile deve considerarsi come zero.

COROLLARIO VII.

281. Se dunque prima d'ora era stato più metafisicamente, che geometricamente dimostrato, che il prodotto d'un'inassegnabile in se stesso, o di due inassegnabili poteva in faccia al prodotto d'un'assegnabile in un'inassegnabile considerarsi come nullo, resta ora contra i vani timori d'alcuni scrupolosi dimostrato per vie tutt'affatto geometriche.

PROPOSIZIONE XVII.

282. Trovar l'indivisibile o elemento di due variabili vicendevolmente dividendisi.

Intorno all'asse AP (Fig. 83.) suppongasi costrutta una figura qualunque ABC , e presa nel suo asse una quantità

costante AC , che sia 1, facciasi $\overline{PN}^m : \overline{AC}^m :: AP : PM$, e così continuamente; ne risulterà la figura ADC , la di cui equazione farà $PM = \frac{AP^m}{\overline{PN}}$; onde sostituiti a \overline{PN} i valori in

termini di AP , si troverà l'indivisibile del quoziente $\frac{AP^m}{\overline{PN}}$,

S f di.

322 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
dividendo la PM per la sotttangente PT (250.); il che &c.

COROLLARIO I.

283. E' chiaro, che la detta analogia può farsi anche in altre maniere ex. gr. $\overline{AP}^m : \overline{AC}^m :: \overline{PN}^m : \overline{PM}^m$; $\overline{PN}^m : \overline{AP}^m :: \overline{AC}^m - \overline{AP}^m : \overline{PM}^m$ &c.

COROLLARIO II.

284. Se ACB sia un quadrato, e l'analogia facciasi $\overline{PN}^m : \overline{AP}^m :: \overline{AC}^m : \overline{PM}^m$; l'equazione alla figura ADC farà $\overline{PM}^m = \overline{AP}^m$; onde questa figura farà al solito una delle infinite Parabole o dell'infinite Iperboli tra gli asintoti; sicchè l'indivisibile della variabile \overline{AP}^m farà nuovamente $m\overline{AP}^{m-1}$.

COROLLARIO III.

285. Quando la figura ACB sia un triangolo rettangolo equicrure, e l'analogia sia $\overline{PN}^n : \overline{AC}^n :: \overline{AP}^m : \overline{PM}^m$, l'equazione alla figura ADC farà $\overline{PM}^m = \overline{AP}^{m-n}$, cioè ad infinite Parabole quando $m-n$ fosse positivo (eccetto $m-n=1$, ovvero $=0$), e ad infinite Iperboli tra gli asintoti quando fosse negativo. Se ad infinite Parabole, l'indivisibile della quan-

quantità variabile $\frac{AP^m}{AP^n}$, ovvero \overline{AP}^{m-n} si troverà, essere (m

$-n$) \overline{AP}^{m-n-1} ; Se ad infinite Iperboli tra gli asintoti, l'indivisibile di detta quantità variabile si troverà, facendo $m-$

$n=r$; ed allora l'equazione dirà $PM=\overline{AP}^r$; onde il suo indivisibile sarà $\frac{-rPM}{AP} = -r\overline{AP}^{r-1}$; il tutto come sopra ne' luoghi più volte citati.

PROPOSIZIONE XVIII.

286. Trovar nuovamente l'indivisibile di due variabili scambievolmente dividendisi.

Tali variabili siano le due coordinate AP, PM d'una figura qualunque AMP (Fig. 84.); tirate la pm infinitamente prossima alla PM, e la Mo parallela alla AP, è chiaro, che l'indivisibile del quoziente $\frac{AP}{PM}$ è $\frac{AP+Pp}{PM+om} - \frac{AP}{PM}$; onde riducendo tal quantità al medesimo denominatore, si avrà $\frac{AP \times PM + PM \times Pp - PM \times AP - om \times AP}{(PM+om) \times PM} = \frac{PM \times Pp - AP \times om}{(PM+om) \times PM}$; ma $PM+om=PM$ (7.); dunque l'indivisibile richiesto del quoziente $\frac{AP}{PM}$ farà $\frac{PM \times Pp - AP \times om}{PM}$; il che &c.

COROLLARIO I.

287. Se mentre crescono le ascisse AP (Fig. 85.), scemassero le applicate PM , o viceversa, allora crescerebbe l'indivisibile Pp dell'ascissa AP , e scemerebbe l'indivisibile om dell'applicata PM , o viceversa; e perciò l'indivisibile d'una coordinata deve in tal caso esser sempre accompagnato con segno contrario a quello prefisso all'indivisibile dell'altra. Posto ciò, l'indivisibile del quoziente $\frac{AP}{PM}$ sarà $\frac{AP}{PM} - \frac{AP+Pp}{PM-mo} =$

$$\frac{AP \times PM - AP \times mo - AP \times PM + PM \times Pp}{PM^2} = \frac{PM \times Pp - AP \times om}{PM^2};$$

come sopra.

COROLLARIO II.

288. Quindi la Regola III. 1.) Si moltiplichi il denominatore dell'indivisibile del numeratore; 2.) dal prodotto detraggasi il prodotto del numeratore nell'indivisibile del denominatore; 3.) tal differenza dividasi per il quadrato del denominatore; quest'operazione darà l'indivisibile di due quantità variabili scambievolmente dividentisi.

COROLLARIO III.

289. Dunque tirata dal punto M la tangente MT (Fig. 84. 85.), l'indivisibile del quoziente dell'ascissa divisa per l'applicata sarà secondo i posti principj (250. 254.)

$$\frac{PM \times PT - AP \times PM}{PT \times PM^2} = \frac{PT - AP}{PT \times PM}.$$

Co-

COROLLARIO IV.

290. Ma se il quoziente delle variabili dividendi fosse $\frac{PM}{AP}$, cioè l'applicata divisa per l'ascissa, il suo indivisibile sarebbe $\frac{AP \times om - PM \times Pp}{AP^2} = \frac{AP \times PM - PM \times PT}{PT \times AP^2}$.

COROLLARIO V.

291. Se la data figura fosse un rettangolo ACB (Fig. 82.), e si cercasse l'indivisibile del quoziente $\frac{PM}{AP} = \frac{1}{AP}$, tal divisibile (rinuovando il calcolo fatto nella dimostrazione della presente Proposizione) sarebbe $\frac{1}{AP+Pp} - \frac{1}{AP} = \frac{AP-AP-Pp}{(AP+Pp) \times AP} = \frac{-Pp}{(AP+Pp) \times AP}$; ma è cosa certa per le fatte dimostrazioni, (262. 283. 284.), che l'indivisibile della quantità $\frac{1}{AP}$ è $\frac{-Pp}{AP^2}$; dunque $(AP+Pp) \times AP = \overline{AP^2}$, e in conseguenza $AP+Pp = \overline{AP}$; il che dimostra, che aggiungendo ad una inassegnabile, o togliendo da essa una quantità inassegnabile, tal giunta, o tal defalco non altera geometricamente tal assegnabile; dico geometricamente, perchè un tal eccello, o un tal difetto è incapace totalmente di misura percettibile.

Scor.

S C O L I O.

292. Quando le potenze d'una coordinata sono proporzionali a quelle dell'altra, si conoscerà, col far riflessione a ciò, che s'è poch' anzi dimostrato (268, 283.), ovvero col farne la prova, che l'ultime due regole enunciate di moltiplicazione, e divisione (276. 287.) per trovare l'indivisibile del prodotto, o del quoziente di due variabili sono promiscue, cioè conducono egualmente l'una, che l'altra a sciogliere il Problema; ma quando manca una tal proporzionalità nelle dette coordinate, allora l'affare non va così, essendo affatto diverse le regole per giungere a tal soluzione.

PROPOSIZIONE XIX.

293. *Dato il componente, o sia l'indivisibile, trovare il composto, o sia la somma.*

Il dato indivisibile si consideri com' eguale all'applicata PN (*Fig. 24. 29. 30. 31. 32. 33. 34.*) d'una figura ADNP; conosciuta da tal equazione la natura di detta figura, si trovi cogli esposti metodi (58. e seg.), o con altri, un'altra figura APM, le di cui applicate PM siano proporzionali all'aree ADNP, indi moltiplicando la sottangente PT della seconda figura APM nell'applicata PN della prima figura, il prodotto darà la somma richiesta.

Imperciocchè essendo PN eguale al dato indivisibile, l'intera figura ADNP eguaglierà la sua somma; ma questa figura eguaglia il prodotto della PT nella PN (78.); dunque
tal

tal prodotto eguaglierà la somma richiesta del dato indivisibile; il che &c.

E S E M P I O I.

294. Il dato indivisibile sia una quantità costante, cioè 1, di cui richiedasi la somma; l'equazione $PN=1$ indicherà un rettangolo AD (*Fig. 86.*); ma in questo l'aree AN stanno come l'applicate PM del triangolo ABC, la di cui sottangente è AP; dunque la somma richiesta sarà $AP \times PN$ riguardo al rettangolo AN, ovvero $AC \times CD$ riguardo a tutto il rettangolo AD, com' appunto insegnano gli Elementi.

E S E M P I O II.

295. Sia AP il dato indivisibile, di cui richiedasi la somma. Piglisi PN per l'applicata d'una figura, e s'avrà $PN=AP$, equazione ad un triangolo equilatero AID (*Fig. 99*), le di cui aree APN stando come il quadrato di AP, faranno proporzionali all'applicate PM della Parabola Apolloniana AM rivolgente la convessità all'asse AP, e che ha la sottangente $PT=\frac{1}{2}AP$ (12.); onde la somma ricercata sarà $\frac{1}{2}AP \times PN = \frac{1}{2}AP^2$; il che pure concorda cogli Elementi.

E.

E S E M P I O III.

296. Sia il dato indivisibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP - AP^2)}}$, cioè reciproco all'applicata PM (Fig. 21.) del cerchio ADB, il di cui centro C, e il di cui raggio $AC = 1$; avremo per equazione $PS = \frac{1}{PM}$, qual equazione è alla curva SE, le di cui aree AVSP stanno come gli archi circolari AM (62.), cioè come l'applicate d'un'ungula cilindrica appianata, di cui già si fece menzione (38.), la di cui sottangente è $PM \times \text{arc:AM}$ (38.); onde la somma del proposto indivisibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP - PA^2)}}$ farà $PM \times \text{arc:AM} \times PS = \text{arc:AM} = \text{arc:AM} \times AC$; cioè l'area AVSP eguaglia il doppio del settore AMC, e l'area AVEC il doppio del quadrante ADC appunto come si è altrove determinato (94.).

COROLLARIO.

297. Quindi raccogliasi, effere la femicicloide AMB (Fig. 45.) tripla del semicerchio genitore AND, perchè ogni NM come eguale al corrispondente arco AN, eguaglierà ogni applicata della suddetta ungula cilindrica appianata, onde tutto il trapezio femicicloideale ANDBMA farà doppio del semicerchio AND, e in conseguenza la femicicloide AMBD farà tripla del semicerchio genitore AND, ovvero tutta la cicloide tripla del cerchio genitore.

E-

E S E M P I O IV.

298. L'indivisibile da sommarli sia il seno retto diviso per il seno verso, cioè $\frac{PG}{AP}$ (Fig. 69.); l'equazione farà $PQ = \frac{PG}{AP}$, che è alla Versiera Grandiana QS più volte nominata, l'area AVQP della quale stanno come l'applicate PM della Cicloide AM (64.), che ha la sottangente $PT = \frac{AP \times PM}{PG}$; onde la somma del dato indivisibile farà $PM \times 1$, cioè il prodotto di $PG + arc:AG$ in una quantità costante, dalla minore, o maggior grandezza della quale dipende la minore, o maggior grandezza della PQ, e in conseguenza la minore, o maggiore ampiezza dell'area AVQP; onde se nella genesi dell'area AVQP farà preso il raggio $AC = 1$, la somma dell'assegnato indivisibile $\frac{PG}{AP}$ farà il doppio del settore circolare AIG, il che concorda, come deve, con la già data misura (96.); sicche fatto il raggio $AC = 1$, il proposto indivisibile in termini di AP farà $\frac{\sqrt{(2AP - AP^2)}}{AP}$, e la

sua somma farà $\sqrt{(2AP - AP^2)} + arc: AG$.

COROLLARIO

299. Si è veduto nell'Esempio antecedente (295.), che l'arco AG è la somma dell'indivisibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP - AP^2)}}$; dun-

T t

que

330 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*
 que facendo, che il segno \int indichi somma, la somma dell'
 indivisibile $\frac{\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)}}{AP}$ farà $\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)} \int \frac{1}{\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)}}$.

E S E M P I O V.

300. Sia il dato indivisibile \overline{AP}^n , pigliando n per qualunque numero positivo intero, o rotto; facciasi l'equazione

$PN = \overline{AP}^n$, ch'è all' infinite Parabole DN (Fig. 29. 30.), l'aree ANP delle quali stanno come l'applicate d'un'altra

Parabola AM, la di cui equazione è $AQ = \overline{QM}^{n+1}$ (87.); onde si troverà essere la sottangente $PT = \frac{1}{n+1} AP$ (80.),

e in conseguenza la somma del dato indivisibile \overline{AP}^n farà $\frac{1}{n+1} AP$

$$\times PN = \frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1} \quad (57.).$$

C O R O L L A R I O I.

301. Se il dato indivisibile fosse \overline{AP}^{-n} , dove per n s'intende qualsivoglia numero intero, o rotto, l'equazione farebbe

$PN = \overline{AP}^{-n}$, cioè all' infinite Iperboli DN tra gli asintoti (Fig. 33. 34.), sicchè la sua somma si troverebbe essere

$$\text{per le cose dette (92.) } \frac{1}{1-n} PT \times PN = \frac{\overline{AP}^{1-n}}{1-n} = \frac{\overline{AP}^{-n+1}}{n+1};$$

on-

onde pigliando generalmente nell' indivisibile \overline{AP}^n la quantità n per un numero rotto, o intero, positivo, o negativo la formula $\frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1}$ indicherà sempre la di lui somma.

COROLLARIO II.

302. Quindi riguardo alle quadrature verrebbe a replicare l' istessa Regola fondamentale superiormente enuncia-

ta (232.), dimodochè se vi fosse l'equazione $\overline{PM} = \overline{AP} \pm \overline{AP}^2$, che col segno negativo è ad infiniti cerchj, e coll' affermativo ad infinite Iperboli riferite all' asse, si otterrà sempre la quadratura di tali curve ogni volta che n riducasi ad un numero rotto, il di cui numeratore sia l' unità; perchè fatto in tal caso $n = \frac{1}{m}$, l'equazione sarà $\overline{PM} = (\overline{AP} \pm \overline{AP}^{\frac{1}{m}})^m$; sicchè posto per esempio $m = 2$, l'equazione dirà $\overline{PM} = \overline{AP}^2 \pm 2\overline{AP} + \overline{AP}$, la quadratura della qual curva è $\frac{1}{3}\overline{AP}^3 \pm \frac{1}{2}\overline{AP}^2 + \frac{1}{5}\overline{AP}$, il che dà il contegno per altri casi consimili.

PROPOSIZIONE XX.

303. Dato il logaritmo d' una variabile, trovarne l' indivisibile, o sia l' elemento.

Il numero espresso dalla variabile CQ (Fig. 109.) applicata alla logistica ordinaria QMB, il di cui asintoto CE,

T t 2

e la

e la di cui sottangente PT, abbia per logaritmo l'ascissa PC. Prolungata questa indefinitamente in V, tra gli asintoti QC, CV descrivasi l'Iperbole equilatera NDV, il lato della di cui potenza eguagli la sottangente PT; indi da i punti M, Q conducansi alla detta curva iperbolica le rette MAD, QN parallele alla PC.

Lo spazio iperbolico QNDA proporzionale alla corrispondente AM (67. 71.) = PC, esprimerà il logaritmo della CQ (68. 70.); ma l'indivisibile, o elemento di tale spazio è la QN (240.) = $\frac{1}{CQ}$; dunque l'indivisibile, o elemento del logaritmo della variabile CQ è $\frac{1}{CQ}$; il che &c.

COROLLARIO I.

304. Siccome la progressione geometrica crescente comincia ordinariamente per maggior comodo dall'unità, e la progressione aritmetica dal zero, fatta l'applicata PM eguale alla sottangente $PT = 1 = CA$, si supponga, che l'origine della variabile AQ sia in A; si dimostrerà coll'istesso metodo, che essendo QN l'elemento dello spazio iperbolico QNAD esprimente il logaritmo della $CQ = 1 + AQ$, l'elemento, o indivisibile di tal logaritmo dovrà essere $\frac{1}{1+AQ}$.

COROLLARIO II.

305. Parimente se ritenuta la AC per costante, la variabile AH, che ha l'istessa origine in A, vada crescendo al
con-

contrario della AQ , il logaritmo della $HC = 1 - AH$ espresso dall'area iperbolica $ADGH$, dovrà avere il segno negativo, essendo logaritmo di numero minore dell'unità, e però negativo a differenza del logaritmo della CQ , che essendo maggiore dell'unità, è positivo; ma l'indivisibile, o elemento di tal area $ADGH$ è la $HG = \frac{1}{CH} = \frac{1}{1 - AH}$; dunque prefisso a tal formula il segno negativo, l'elemento, o indivisibile della quantità $1 - AH$, cioè della differenzad'una variabile da una costante, farà $\frac{-1}{1 - AH}$.

S C O L I O I.

306. Che l'area iperbolica $ADGH$ esprima il logaritmo negativo della CH , così dimostrasi. Ritenuta al solito la prima applicata $PM = CA = PT$, e fatta $PO = PC$, dal punto O si ordini alla logistica la Ob , che dalla DM sia segata in a ; poscia intorno all'angolo retto O col lato della potenza $OM = PM = AC$ descritta tra gli asintoti Oa , OE l'Iperbole equilatera gd , si conduca per H la retta Gg parallela all'asse OC , e recidente in g la detta Iperbole gd tagliata ancora dalla Ma in d .

La PO , ovvero la Kb , ovvero lo spazio Iperbolico $adgb$ esprimerà il logaritmo negativo del numero denotato dalla $Ob = CH$; ma lo spazio iperbolico $adgb$ è visibilmente eguale allo spazio iperbolico $ADGH$; dunque ancora lo spazio $ADGH$ esprime il logaritmo negativo della CH .

Co:

COROLLARIO III.

307. Giacchè l'istessa cosa è considerare l'applicata da se sola, quanto moltiplicata nell'indivisibile, o elemento dell'ascissa (255.), ne segue il Canone I. cioè *l'indivisibile, o elemento del logarismo d'una quantità qualunque variabile eguaglia l'indivisibile, o elemento di tal quantità partito per la quantità medesima.*

COROLLARIO IV.

308. Quindi si avrà viceversa il Canone II. cioè *la somma d'un quoziente, di cui il numeratore sia l'unità, e il divisore variabile, è il logarismo di tal divisore.*

S C O L I O II.

309. Avvertasi, che la quantità elementare $\frac{1}{CQ}$ (Fig. medesima) può aver due somme diverse, l'una delle quali è il logarismo di CQ, e l'altra è $\frac{1}{C}$, cioè nel primo caso l'area asintotica limitata QNDA, e nel secondo caso l'illimitata QNVC (92.); così assumendo i simboli del calcolo infinitesimale, due ponno essere l'integrazioni della formula $\frac{dx}{x}$, cioè $\log x$, come ancora $\frac{1}{C}$; bisogna dunque star cauti nel trattare astrattamente il calcolo, di non pigliarle amendue promiscuamente come conducenti all'istesso fine, nella qua-

PARTE SECONDA, CAPITOLO IV. 335

quale inavvertenza sono caduti il Wolfio (^a), e M. de Bougainville (^b), ma conviene servirsi or dell'una, or dell'altra, secondo la condizione del Problema che si ha tra mano.

S C O L I O III.

310. Bisogna distinguere l'unità aritmetica dall'unità geometrica, o sia l'unità numerica dall'unità lineare. In questo metodo l'indivisibile dell'ascissa fa figura d'unità numerica (254.), onde se vi fosse un'altra unità lineare, le vada dopo il computo sostituito il suo equivalente; così quando si è detto essere $QN = \frac{1}{1+AQ}$ (303.), si è supposto, che l'unità significhi il lato della potenza dell'Iperboie, sicchè sostituendo a tal unità la CA, siavrebbe $QN = \frac{CA^2}{CA+AQ}$.
Serva dunque ciò di cautela tanto per gli Esempli addotti, quanto per quelli, che s'addurranno, a fine d'evitare ogni equivoco.

CA-

(^a) *Elem. Math. Univ. T. II. §. 102.* | *Chap. I. §. III.*
(^b) *Traité du Calcul Integral Par. I.*

CAPITOLO QUINTO.

Nuovamente delle Tangenti .

PROPOSIZIONE XXI.

311. **T**rovare la sottangente d' una data curva algebrica;
 Siccome la sottangente d' una curva è
 il quoziente nato dalla partizione dell' applicata per il suo indivisibile (252.), trovatisi nella proposta equazione l' indivisibile all' equivalente dell' applicata, e per esso indivisibile dividasì tal equivalente; il quoziente, che ne nascerà, darà la sottangente richiesta. Il che &c.

E S E M P I O I.

312. Sia l' equazione $\overline{PM}^n = AP$, ovvero $PM = \overline{AP}^{\frac{1}{n}}$
 l' indivisibile di $\overline{AP}^{\frac{1}{n}}$ (equivalente dell' applicata PM) farà
 $\frac{1}{n} \overline{AP}^{\frac{1}{n}-1}$, per cui diviso $\overline{AP}^{\frac{1}{n}}$, il quoto farà nAP , che
 col

PARTE SECONDA, CAPITOLO V. 337

col segno positivo darà la sottangente all'infinite Parabole, e col segno negativo all'infinite Iperboli tra gli asintoti, appunto come sopra (22. 26.).

E S E M P I O II.

313. Sia l'equazione $\overline{PM}^n = AP \pm \overline{AP}^2$, cioè col segno negativo ad infiniti cerchj, e col positivo ad infinite Iperboli riferite agli assi; facciasi $PM = (\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)^{\frac{1}{n}}$, il di cui indivisibile è $\frac{1}{n} (\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)^{\frac{1}{n} - 1} \times (1 \pm 2AP) =$

$$\frac{(\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)^{\frac{1}{n}} \times (1 \pm 2AP)}{n(\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)} \quad (264.), \text{ per cui diviso } (\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)^{\frac{1}{n}}$$

il quoziente $\frac{n(\overline{AP} \pm \overline{AP}^2)}{1 \pm 2AP}$ darà la formula delle sottangenti per le curve comprese nella proposta equazione.

E S E M P I O III.

314. Sia l'equazione $RM = \frac{\overline{AR}^3}{\sqrt{(AR - \overline{AR}^3)}}$ alla Cissoide AM

(Fig. 46.) di Diocle. L'indivisibile della quantità $\frac{\overline{AR}^3}{\sqrt{(AR - \overline{AR}^3)}}$

sarà $\frac{3\overline{AR}^2 - 2\overline{AR}^3}{2\sqrt{(AR - \overline{AR}^3)} \times (AR - \overline{AR}^3)} \quad (287.);$ per questo indivisibile

V v le

338 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

le divida detta quantità, il quoziente $\frac{(AC - AR) \times 2AR}{3AC - 2AR}$ darà il valore della cercata sottangente.

E S E M P I O IV.

315. Sia ad infiniti Circoli, Circoloidi &c. l'equazione $PM = \left(\frac{n}{AP} - \frac{n+1}{AP^{n+1}} \right)^{\frac{1}{n+1}}$; l'espressione generale alle sottangenti di tali infinite curve sarà $\frac{(n+1)(\overline{AP}^n - \overline{AP}^{n+1})}{n\overline{AP}^{n-1} - (n+1)\overline{AP}^n} = \frac{(n+1)(\overline{AP} - \overline{AP}^2)}{n - n\overline{AP} - \overline{AP}}$, dividendo sotto, e sopra per \overline{AP}^{n-1} .

E S E M P I O V.

316 Sia all' infinite Ellissi, Ellissoidi &c. col segno negativo, e all' infinite Iperboli, Iperboloidi &c. col segno positivo l'equazione $PM = \left(Q \times \overline{AP}^m \times (1 \mp \overline{AP})^n \right)^{\frac{1}{m+n}}$, dove il maggior asse sia 1, e Q il parametro; l'espressione generale alle sottangenti di tali curve infinite sarà

$$\frac{(m+n) Q \times \overline{AP}^m \times (1 \mp \overline{AP})^n}{mQ \times \overline{AP}^{m-1} \times (1 \mp \overline{AP})^n \mp nQ \times \overline{AP}^m \times (1 \mp \overline{AP})^{n-1}} \quad (276.);$$

e di-

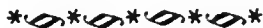
e dividendo tanto il numeratore, quanto il denominatore,

per $Q \times \overline{AP}^{m-1} (1 \mp AP)^{n-1}$, la detta espressione finalmente fa-

$$\text{rà } \frac{(m+n) \overline{AP} \mp \overline{AP}^2}{m \mp \overline{AP} \mp n \overline{AP}} :$$



CAPITOLO SESTO.

Della Rettificazione delle Curve.

PROPOSIZIONE XXII.

317. **D** *Ata qualunque curva, trovarne un' altra le di cui aree intorno ad un asse comune siano proporzionali agli archi corrispondenti della data curva.*

Sia AMB (Fig. 55. 87. 88. 89. 90. 91.) la data curva. Dal punto M tirata la tangente MT, e l'indefinita MN (Fig. 55. 87. 88. 89.) parallela all'asse AP (che nelle figure 55. 87. segnerà in R la retta AR condotta dal vertice A di detta curva parallelamente alle basi BI, BC; e nelle figure 88. 89. taglierà la base BI) facciasi $PM:MT::1:RN$, e così sempre; ma nelle figure 90. 91. estendasi la semiordinata MP in maniera, che sia sempre $PT:TM::1:PN$; dico, che ogni area natane AVNR (Fig. 55. 87.), IDNR (Fig. 88. 89.), AVNP (Fig. 90.), EVNP (Fig. 91.) sta come il corrispondente arco AM.

Imperciocchè tirata alla MRN (Fig. 55. 87. 88. 89.) l'infinitamente prossima *mrn*, e alla MPN (Fig. 90. 91.) similmente la *mpn*, indi condotta in tutte le dette figure la norma-

ma-

PARTE SECONDA, CAPITOLO VI. 341

male Mo , per la similitudine de' triangoli MPT , Mom , farà Mo (*Fig. 55. 87. 88. 89.*), ovvero $Rr:Mm::PM:MT::1:RN$; onde $NR \times Rr = Mm$. Parimente farà (*Fig. 90. 91.*) $Pp:Mm::1:PN$; quindi $NP \times Pp = Mm$; dunque sommando, ogn'area costrutta nel modo esposto farà al corrispondente arco AM proporzionale; il che &c.

COROLLARIO I.

318. Tirata al vertice A (*Fig. 55. 88.*) la tangente AH segante in H la tangente TML , che incontri in L la prolungata IB parallela alla detta AH ; indi presa la costante AI per l'unità, se farassi $AI:HL::AI:RN$, farà $RN=HL$; onde prolungate le MR in N talmente, che sia sempre $RN=HL$ tangente corrispondente, l'area $AVNR$, ovvero $BVNR$, che ne nascerà, e che potrà facilmente costruirsi, farà proporzionale all'arco AM , giacche $AI:HL::AT:TH::PT:TM$. Col medesimo raziocinio, prolungata nella figura 90. la MP in N in modo, che sia $PN=HL$ tangente, si dimostrerà, che l'area natane $AVNP$ starà come l'arco AM . Ma nella figura 89. prolungata la tangente TH finche incontri in L l'estesa CB , e presa la base $BF=CA$ per costante, essendo $CA(BF):HL::CT:TL::AT:TH::PM:MT$, avremo $PM:MT::BF:HL::CA:RN=HL$; fatte dunque tutte le RN eguali alle tangenti corrispondenti HL , se ne costruirà l'area $IDNR$ proporzionale all'arco AM . Parimente fatta costante nella figura 87. la base $BC=AI$, e condotta la tangente TM a ferire in L la IB prolungata, si dimostrerà col medesimo discorso, che
pre-

prese tutte le RN eguali alle tangenti corrispondenti TL; l'area natane AVNR starà come l'arco AM; e nella figura 91. per la similitudine de' triangoli GHL, MPT, fatta PN=HL, l'area EVNP starà anch' essa come l'arco AM.

COROLLARIO. II.

319. E' chiarissimo, che divisa l'area AVNR (*Fig. 55. 87.*), IDNR (*Fig. 88. 89.*), AVNP (*Fig. 90.*), EVNP (*Fig. 91.*) per la presa quantità costante, qualunque sia, il quoziente eguaglierà l'arco AM.

COROLLARIO III.

320. Essendo alla curva VND (*Fig. 55. 87. 88. 89.*)

l'equazione generale $RN = \frac{TM}{PM}$, ovvero $\overline{RN}^2 = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{\overline{PM}^2}$

$= 1 + \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2}$; come ancora (*Fig. 90. 91.*) $PN = \frac{MT}{PT}$, ovve-

ro $\overline{PN}^2 = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = 1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2}$; se a tali formule si sostitui-

ranno gli equivalenti in termini o di AR, o di IR, o di AP, se n' otterrà l'equazione particolare, che ne determinerà la natura.

Sco-

S C O L I O.

321. Notifi 1.) che si può tra le sei proposte figure scegliere quella, che contribuisce ad una più facile, e più netta costruzione della curva cercata, colla circospezione, che se la sottangente è maggior dell'ascissa, la costruzione dev'essere a norma delle figure 55. 88. 90.; viceversa a norma delle figure 87. 89. 91., come dalla loro ispezione facilmente riconoscesi. 2.) Che il rapporto, o la misura dell'arco AM può ottenersi col proposto metodo (317.) per mezzo di due curve di natura diversa 3.) Che l'area di tali due curve proporzionalmente corrispondenti all'istesso arco AM sono eguali quando le divide la medesima quantità costante; onde se d'una fosse cognita la quadratura, lo sarà ancora dell'altra 4.) Che questa Proposizione riguardo alla figura 90. è nel suo fondo l'istessa della Proposizione X: (140.), o almeno un di lei Corollario; imperciocchè supposto, che l'arco AM sia disteso sulla retta PQ, che serva d'applicata alla curva AQG, si tratta di trovare la curva VND contenente li spazj AVNP ad esse PQ proporzionali; onde la presente Proposizione si può dimostrare col metodo di quella in tal guisa. Tirata al punto Q la tangente Qr, siccome l'area AVNP = $P_r \times PN$ (78.), si avrà $P_r \times PN = PQ$; quindi $PN = \frac{PQ}{P_r}$; ma $P_r = \frac{PT \times PQ}{MT}$ (37.); dunque $PN = \frac{MT}{PT}$; il che dà l'analogia $PT:TM::1:PN::oM:Mm$ &c. Il medesimo può dimostrarsi nella figura 91.; com'è evidente. 5.) Si poteva ancora trovare il valore della

la

la Mm , facendo $Mm = \sqrt{(mo + Mo)^2} = \sqrt{(1 + \frac{PM^2}{PT^2})} (251.254)$;
 come pure fatta l'analogia (Fig. 55. 87. 88.) $mo:Mm::PT:MT$;
 ovvero (Fig. 89. 90. 91.) $Mo:Mm::PT:MT$,

se ne farebbe ricavata l'equazione $Mm = \frac{MT}{PT} = \sqrt{(1 + \frac{PM^2}{PT^2})}$, che confronta coll'antecedente (321.); ma è

preferibile l'esposto primo metodo, da cui deduconsi due soluzioni del Problema, il che da questi altri due non si ottiene. 6.) Nelle figure 55. 87. 88. 89. l'equazione deve farsi all'applicata PM , e nelle figure 90. 91. all'ascissa AP . 7.) Se per tangente si fosse presa la ML , e si fosse descritta la curva DNV secondo l'esposto metodo, l'area d'una tal curva starebbe come l'arco BM , quando ancora B non fosse l'origine della curva BMA . 8.) Il Problema generale riguardante la rettificazione delle curve si riduce a quello delle quadrature.

DEFINIZIONE XIII.

322. La curva DNV si chiamerà *rettificatrice* della curva AM .

ESEMPIO I.

323. N. 1. Sia AM (Fig. 90.) una Cicloide, o Trocoide comune, il di cui cerchio genitore AFI , siccome PN

==

$$= \frac{TM}{TP} = \frac{AF}{AP} (42. 43.) = \frac{1}{\sqrt{AP}}, \text{ l'equazione alla cur-}$$

va VND farà $\overline{PN}^2 = \frac{1}{AP}$, il che indica, esser essa un' Iperbole tra gli asintoti, la quadratura del di cui spazio AEVNP è $2AP \times PN (89.) = 2AF$; onde l'arco della Cicloide eguaglia il doppio della corda corrispondente del cerchio genitore,

N. 2. Sia di nuovo AM una Cicloide; giacchè la rettificazione dell'arco AM eguaglia la somma di $\frac{TM}{TP}$, cioè di

$\frac{AF}{AP}$, ovvero di $AI^{\frac{1}{2}} \times AP^{\frac{1}{2}}$, e questa somma è $2\sqrt{(AI \times AP)} = 2AF$, l'arco AM eguaglierà come sopra il doppio della corda corrispondente del cerchio genitore.

N. 3. Sia nuovamente AM (Fig. 88.) una Cicloide, il di cui cerchio genitore AFI; per essere $\overline{RN}^2 = \frac{MT^2}{PM^2} (321.)$

$$= \frac{AF^2}{FP^2} (42. 43.) = \frac{1}{PI} = \frac{1}{MR}, \text{ ne verrà, che la curva}$$

rettificatrice DNV avrà i quadrati dell' applicate RN reciproci all'applicate MR di essa Cicloide riguardo all'altr' asse BI; onde BV farà suo asintoto; e se si piglierà l'arco AM eguale all'arco AM della figura 90., anche l'area RNDI eguaglierà l'area AVNP, e perciò sarà quadrabile; le medesime conseguenze ricavanfi anche dalla figura 55.

COROLLARIO I.

324. Essendo nel cerchio AFI il quadrato della corda AF (*Fig. 90.*) proporzionale alla AP, se questa si riguardi come asse, a cui sia ordinata la detta AF, ne nascerà una Parabola; e per la medesima ragione se fatta la $PQ = 2AF$ (eguale cioè all'arco cicloidale AM), si ordinerà all'asse AP, la curva AQG, che ne risulterà, farà parimente una Parabola; onde gli archi della Cicloide stanno come l'ordinate della Parabola Apolloniana intorno ad un asse comune.

COROLLARIO II.

325. Siccome poi l'ordinate della Parabola Apolloniana stanno come l'aree della detta Iperbole cubica tra gli asintoti (61.), anche gli archi cicloidali staranno come l'aree di tal' Iperbole; il che serve di riprova al N. I. dell'Esempio presente.

COROLLARIO III.

326. L'arco della femicicloide AMB (*Fig. 90.*) farà doppio del diametro AI del cerchio genitore AFI, onde l'arco totale dell'intera Cicloide eguaglierà il quadruplo del diametro di detto cerchio genitore.

E S E M P I O II.

327. N. I. Sia AM (*Fig. 90.*) un cerchio, il di cui centro C. Per essere $TP:TM::PM:MC::1:PN$, farà PN

==

$= \frac{MC}{PM}$; onde essendo costante ancora la MC, farà la PN in ragion reciproca della semiordinata PM; dunque li spazj curvilinei della curva reciproca al cerchio staranno come i corrispondenti archi circolari, nella guisa appunto che altrove si è dimostrato (62.).

N. 2. Sia di nuovo AMB (Fig. 55.) un quadrante di cerchio, il di cui centro I; avrassi $RN = \frac{TM}{PM} = \frac{IM}{IP} = \frac{1}{IP}$, fatto $MI = 1$; onde la curva rettificatrice DNV risulterà d'ordinate RN reciprocamente proporzionali alle subnormali circolari corrispondenti IP; cioè farà in ragion reciproca delle applicate corrispondenti ME relativamente all'asse BI del detto quadrante ABG, ed avrà per asintoto KD, appunto come nel numero antecedente. L'istesso dimostrasi con la figura 88.

COROLLARIO.

328. Si potrà dunque dividere la figura AVNDI (Fig. 90.) reciproca del cerchio in quella data ragione, in cui può esser divisa la periferia circolare.

E S E M P I O III.

329. N. 1. Sia AM (Fig. 89.) una Trattoria, farà la $RN = \frac{TM}{IM}$, cioè per esser costante la tangente TM per la natura di questa curva (117.), la RN starà come $\frac{1}{PM}$, cioè

X x 2 in

348 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

in ragione inversa di IR, onde la curva VN sarà un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti IR, ID, il di cui centro I; e l' arco AM della Trattoria starà come il trapezio iperbolico FDNR, tirata AD parallela a TI; vale a dire che la rettificazione degli archi della Trattoria dipende dalla quadratura delli spazj iperbolici, e che può ottenerfene in conseguenza co' logaritmi la relazione (68. 70.) .

N. 2. Sia replicatamente AM (Fig. 91.) una Trattoria, in cui essendo $PN = \frac{TM}{PT} = \frac{1}{PT}$, ne verrà, che le applicate PN della curva rettificatrice VND saranno reciproche alle sottangenti di essa Trattoria; ovvero per essere $\overline{PT}^2 = 1 - \overline{PM}^2$, l'equazione alla detta curva VND farà $\overline{PN}^2 = \frac{1}{1 - \overline{PM}^2}$; onde le PN staranno in ragion reciproca di $\sqrt{(1 - \overline{PM}^2)}$, e pigliatane la somma, tutta l'area VNPE, e in conseguenza l'arco AM starà come il logaritmo di $\sqrt{(1 - \overline{PM}^2)}$ (308.); vale a dire gli archi della Trattoria saranno esprimibili co' logaritmi, come sopra.

S C O L I O.

330. Piacemi dimostrare la verità di quest' Esempio anche in tal guisa. Sia AM (Fig. 24.) una curva qualunque, e supposta la costruzione della figura nel modo superiormente accennato (110.), per i triangoli simili MSO, Msm, si

avrà

avrà $Mm = \frac{MO \times Ms}{MS} = \frac{Pp \times MO}{PC}$; sicchè se la curva DN sarà un' Iperbole Apolloniana tra gli asintoti VC, CA, sarà Mm , come $Pp \times PN \times MO$; onde se MO fosse costante, starebbe Mm , come $Pp \times PN$; ma non v'è altra curva fuori della Trattoria, che abbia costante la tangente; dunque supposto, che la curva AM sia una Trattoria, le porzioni AM del suo perimetro staranno come l' aree iperboliche ADNP, e perciò si potranno esprimere per mezzo de' logaritmi.

COROLLARIO.

331. Essendosi veduto, che li spazj iperbolicj stanno come l' applicate della Logistica (67. 71.), se distesi in linea retta gli archi della Trattoria si applicheranno a' punti corrispondenti del suo asintoto, ne nascerà una Logistica.

ESEMPIO IV.

332. Sia AM (Fig. 88.) una Parabola Apolloniana, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^2$, e la di cui sottrattente PT $= 2AP$ (18. 312.), sarà $RN = \frac{PT^2}{PM} + 1 = 1 + 4\overline{PM}^2 = 1 +$

$4\overline{IR}^2$, qual' equazione è per le Sezioni Coniche all' Iperbole Apolloniana, computate l' ascisse dal centro I, il di cui asse trasverso DK è doppio della DI, e di cui è molto facile
la

la costruzione; imperciocchè fatta la IE doppia della IR; e alla congiunta DE fatta eguale la RN, farà $\overline{RN}^2 = 1 + 4\overline{IR}^2$, presa DI per l'unità; onde avremo $DS = RN - 1$, $KS = 1 + RN$, $KS \times SD = \overline{RN}^2 - 1$. Sia ora A il parametro, farà $A : 1 :: 4\overline{IR}^2 : \overline{RN}^2 - 1$; $4\overline{IR}^2 = A \times \overline{RN}^2 - A$; $A + 4\overline{IR}^2 = A \times \overline{RN}$; $1 + \frac{4\overline{IR}^2}{A} = \overline{RN}$; sicchè se il parametro A farà eguale alla costante DI, l'Iperbole DN farà equilatera, ed avremo $1 + 4\overline{IR}^2 = \overline{RN}^2$; ma se il parametro non eguaglierà la DI, la DN farà un'Iperbole scalena; dal che inferisce, che gli archi Parabolici stanno come li spazj esteriori dell'Iperbole Apolloniana, e che in conseguenza la rettificazione della Parabola dipende dalla quadratura dell'Iperbole.

E S E M P I O V.

333. Sia AM (Fig. 91.) una Logistica ordinaria, il di cui asintoto IT; per esser TP costante, farà $PN = TM$; cioè nella rettificatrice della Logistica l'applicate sono eguali, o proporzionali alle tangenti di essa Logistica. Presa poi la figura 89., farà la $RN = \frac{TM}{PM} = \frac{\sqrt{1+PM^2}}{PM}$; onde $\overline{RN}^2 = 1 + \frac{1}{PM^2} = 1 + \frac{1}{\overline{IR}^2}$.

E.

E S E M P I O VI.

334. Sia PBF (Fig. 15.) una Logaritmica spirale; siccome i suoi rami AP alle sue sottangenti AT sono in un rapporto costante (51.), lo faranno ancora a causa de' triangoli rettangoli PAT i suoi rami AP alle sue tangenti PT; onde la figura rettificatrice di tal curva farà un rettangolo; preso dunque il raggio AC percostante, l'altezza di tal rettangolo farà la tangente PT eguale in congueenza a tutto il perimetro curvilineo PDFA; sicchè anche la tangente FA eguaglierà il perimetro FA.

E S E M P I O VII.

335. N. 1. Sia l'equazione generale $AP = \sqrt[n]{M}$ (intendendo per n un numero qualunque positivo intero, o rotto), che è all' infinite Parabole possibili, le quali, quando n è maggiore dell'unità, e in conseguenza quando la sottangente è maggiore dell'ascissa, rivolgono la concavità all'asse, e che ad esso oppongono la convessità quando n è minore dell'unità, e in conseguenza quando la sottangente è minore dell'ascissa (22.). Per essere la sottangente PT (Fig. 90. 92.)

$= nAP$ (l. cit.), avremo $\overline{PT}^2 = n^2 \overline{AP}^2$; onde sarà $\overline{PN}^2 = 1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \overline{AP}^{\frac{2}{n} - 2}$, qual esponente $\frac{2}{n} - 2$, quando n è un

sotto

352 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

rotto minore dell'unità, essendo sempre affermativo, indica, che l'equazione è ad innumerabili Iperboli riferite agli assi conjugati, l'ascisse delle quali son computate dal centro; inclusivi anche il caso, in cui $n = \frac{2}{3}$, quantunque l'equazione

$\overline{PN}^2 = \frac{2}{4} AP + 1$ possa essere ancora ad una Parabola conica troncata, rivolgente la concavità all'asse AP.

N. 2. Sia nuovamente l'equazione generale $AP = \overline{PM}^n$ all'universo Parabole, pigliando sempre n per un numero positivo qualunque rotto, o intero. Per essere la sottangente PT (Fig. 55. 87. 88.) $= nAP = n\overline{PM}^n$, avremo $\overline{RN}^2 = 1 + \frac{PT^2}{\overline{PM}^2} = 1 + n^2 \overline{MP}^{2n-2} = 1 + n^2 \overline{AR}^{2n-2}$ (Fig. 55.

87.) $= 1 + n^2 \overline{IR}^{2n-2}$ (Fig. 88.); sicchè quando n sia un numero maggiore dell'unità, l'esponente $2n-2$ dovrà esser sempre affermativo, e perciò allora l'equazione è nuovamente ad interminabili Iperboli riferite agli assi conjugati, l'ascisse delle quali son computate dal centro; inclusivi anche il caso, in cui $n = \frac{2}{3}$, quantunque l'equazione $\overline{RN}^2 =$

$\frac{2}{4} IR + 1$, come nel numero antecedente, possa essere ancora ad una Parabola conica troncata, rivolgente parimente la cavità all'asse IR.

Dal

PARTE SECONDA, CAPITOLO VI. 353

Dal che deducesi, che tutte le Parabole di qualsivoglia genere in infinito riconoscono le nominate Iperboli, o Iperboloidi per rettificatrici de' loro archi, e perciò tali archi faranno all'aree esteriori di dette Iperboli proporzionali.

COROLLARIO I.

336. Se nella prima equazione $\overline{PN}^2 = 1 + \frac{1}{n^2} \overline{AP}^{2n-2}$ (Fig. 90.) fosse la quantità n maggiore dell'unità, l'esponente $\frac{2}{n} - 2$ farà sempre negativo; e se nella seconda equazione $\overline{RN}^2 = 1 + n^2 \overline{AR}^{2n-2}$ (Fig. 87.) la quantità n farà minore dell'unità, l'esponente $2n - 2$ farà parimente negativo; onde ne risulteranno innumerabili altre curve rettificatrici delle Parabole, diverse dalle accennate Iperboli, quali curve, supposto, che la presa quantità costante sia comune, e l'arco Parabolico sia l'istesso, avranno l'aree eguali all'aree iperboliche rettificatrici del medesimo arco, e però se le dette aree iperboliche faranno quadrabili, l'aree di tali curve porteranno seco l'istessa misura (321. N. 3.).

COROLLARIO II.

337. Prolungata la ID (Fig. 88.) da ambe le parti, facciasì IK=ID, IS=RN, e giungasi SN, che farà un'applicata all'asse DS della curva DN; avremo per gli Elementi

$$\overline{RN}^2 - \overline{ID}^2 = \overline{RN}^2 - 1 = \underset{Y}{KS} \times \underset{y}{SD} = \underset{Y}{KD} \times \underset{de}{DS} + \overline{DS}^2; \text{ on-}$$

de si otterrà un'altra equazione alla curva DN, cioè per essere \overline{RN}^2
 $-1 = n^2 \overline{IR}^{2n-2}$, si avrà $\overline{IR}^{2n-2} = \frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{n^2}$, qual'equazione è all'infinito Iperboli DN di prima, con la differenza soltanto, che le ascisse non sono più computate dal centro, ma dal vertice della curva.

COROLLARIO III.

338. Parimente prolungata come nel Corollario precedente la AV (Fig. 92.) da amendue le parti, fatte AK=AV, AS=PN, e giunta SN, si dimostrerà col medesimo metodo, che l'equazione alla curva VN è $\overline{AP}^{\frac{2}{n}-2} = n^2 (KV \times VS + \overline{VS}^2)$, e che perciò le curve VN sono l'istesse Iperboli di prima, colla sola enunciata diversità d'esser riguardate da un'altro lato.

COROLLARIO IV.

339. L'Iperboli dunque rettificatrici delle Parabole hanno le potenze delle applicate proporzionali al rettangolo dell'ascissa nella somma dell'ascissa medesima, e dell'asse trasverso.

COROLLARIO V.

340. Quindi essendo (Fig. 88.) $SN = \left(\frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2n-2}}$

CO-

come ancora (Fig. 92.) $SN = n^2(KV \times VS + \overline{VS}^{\frac{n}{2-n}})$,
 quando sia il primo esponente $\frac{1}{2n-2} = m$, ovvero il secon-
 do $\frac{n}{2-2n} = m$ (intendendo per m un numero intero affer-
 mativo) cioè quando nel primo esponente sia $n = \frac{2m+1}{2m}$, e
 nel secondo $n = \frac{2m}{2m+1}$, è chiaro per le cose dette (302.),
 che l'aree comprese da tali innumerabili curve iperboliche
 faranno quadrabili, e che in conseguenza vi sono innumera-
 bili curve Paraboliche affolutamente rettificabili.

S C O L I O I.

341. Osservisi, che quando $n = \frac{2}{3}$, l'esponente $\frac{1}{2n-2}$
 diviene $= 1$; e che quando $n = \frac{2}{3}$ l'esponente $\frac{n}{2-2n}$ divie-
 ne parimente $= 1$; onde nel primo caso l'equazione alla
 curva rettificatrice dell'arco Parabolico sotto l'equazione AP
 $= \overline{PM}^{\frac{2}{3}}$ farà (Fig. 88.) IR, ovvero $SN = \frac{4}{9}KD \times DS +$
 $\frac{4}{9}\overline{DS}^2$; nel secondo caso poi l'equazione alla curva rettifica-
 trice dell'arco Parabolico sotto l'equazione AP $= \overline{PM}^{\frac{2}{3}}$ (Fig.

Y y 2 92.)

92.) farà AP, ovvero $SN = \frac{4}{9}KV \times VS + \frac{4}{9}VS^2$; sicchè le Parabole troncate espresse dall'equazioni addotte nel numero primo, e secondo di quest'Esempio coincidono coll'aree iperboliche del suddetto carattere, e perciò l'ho incluse nella serie delle suddette Iperboli rettificatrici delle Parabole (336.).

COROLLARIO VI.

342. Se l'equazione proposta fosse stata $IP = \overline{PM}$ (F. 93.) all'infinito Iperboli tra gli asintoti, cioè se la quantità n fosse stata negativa, si sarebbe trovato $\overline{RN}^2 = 1 + n^2 \overline{IK}^{-2n-2}$ per equazione alle curve NV rettificatrici di tali Iperboli.

COROLLARIO VII.

343. Un'altra equazione alle dette curve rettificatrici NV delle Iperboli tra gli asintoti si troverà col medesimo metodo sopra esposto, facendo $IK = ID$, $IS = RN$, e giunta la SN, che sarà un'applicata d'essa curva NV; si avrà come quì sopra $\overline{RN}^2 - 1$, ovvero $\overline{IS}^2 - 1 = KD \times DS + \overline{DS}^2$, e finalmente $\overline{SN}^{-2n-2} = \frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{u^2}$.

Co.

COROLLARIO VIII.

344. Dunque le curve rettificatrici dell'Iperboli tra gli asintoti hanno le potenze negative dell'applicate proporzionali al rettangolo dell'ascissa nella somma dell'ascissa, e del loro lato trasverso; cioè sono curve reciproche dell'Iperboli, che rettificano le Parabole.

COROLLARIO. IX.

345. Quindi tali curve NV faranno anch'esse tra gli asintoti DG, DS; sicchè condotta la AV parallela all'asse PI fino all'incontro della curva NV in V, l'area asintotica RNVI misurerà l'arco indefinito MX, e l'area RNVF misurerà il corrispondente arco determinato AM.

S C O L I O II.

346. Siccome facendo alla curva VND (Fig. 88.) l'equazione $\overline{RN}^2 - 1 = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2}$, ovvero $KS \times SD = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2}$, coll'

avvertenza di porre il valore \overline{PT}^2 in termini di $\overline{PM} = \overline{SN}$;

alla curva VND (Fig. 92.) l'equazione $\overline{PN}^2 - 1 = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2}$,

ov.

ovvero $KS \times SV = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}}$, coll'avvertenza di porre il valore

$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}}$ in termini di $AP = SN$, la detta curva VND non resta ,

come si è veduto, alterata, ma si considera soltanto sotto diverso aspetto; comprendesi facilmente, che ritenuto in qualunque curva da rettificarsi l'istesso arco coll'istessa quantità costante, la curva rettificatrice aderente ad una delle coordinate farà reciproca alla curva rettificatrice aderente all'altra coordinata.

347. Chi poi volesse un'altra equazione alla curva DN (Fig. 88.), abbassata la MG normale in M alla curva AM,

giacchè vi è per la costruzione l'analogia $\overline{MT}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{RN}^2 : \overline{ID}^2$, farà dividendo, $\overline{TM}^2 - \overline{MP}^2 (\overline{PT}^2) : \overline{PM}^2 :: \overline{RN}^2 - \overline{ID}^2 (\overline{IS}^2 - \overline{ID}^2) : \overline{ID}^2 :: KS \times SD : \overline{ID}^2 :: \overline{PM}^2 (\overline{SN}^2) : \overline{PG}^2$; onde $\overline{SN}^2 = \frac{\overline{PG}^2 \times KS \times SD}{\overline{ID}^2}$. La medesima equazione trovasi quando la cur-

va AM rivolgesse la convessità all'asse AP, come nella figura 87., il che è per se manifesto, facendo la debita costruzione. Parimente per le cose dette (318.) espressa la tangente HL in termini dell'applicata della curva AM riguardo alle figure 55. 88. 89., ovvero in termini dell'ascissa rispetto alle figure 90. 91., indi facendo di tal valore l'equazione alla RN nelle figure 55. 88. 89., ovvero alla PN nelle figure 90. 91., si conoscerà anche in tal guisa la natura della curva rettificatrice DN. CA-

CAPITOLO SETTIMO.

Delle Cubature.

DEFINIZIONE XIV.

348.

Cubare un solido significa trovare la dimensione della sua solidità.

PROPOSIZIONE XXIII.

349. Cubare un solido nato dalla conversione d'una figura piana *ABC* (Fig. 94.) intorno all'asse *AC*.

Siccome gl' indivisibili, o gli elementi di un tal solido sono i cerchj paralleli alla base *BC*, e in conseguenza tra loro, ne' quali può tutto il solido esser decomposto (240.), dato il valore d'uno di tali cerchj, e trovatane poscia la somma, è chiaro, che sarà noto tutto il solido; fatto dunque il rapporto del raggio alla periferia come $r:p$, la periferia circolare descritta dal raggio *PM* sarà $\frac{p \times PM}{r}$, e in conseguenza il cerchio, che ha per raggio la *PM*, sarà

$p \times -$

$\frac{p \times \overline{PM}^3}{2r}$; onde sostituiti i valori in termini di AP, e fatte la somma, si verrà in cognizione de' solidi proposti ne' casi particolari.

COROLLARIO.

350. Quantunque l'origine della curva AMB sia in A, se si volesse far rotare la figura BAC intorno l'asse BC, si troverà nel modo istesso il solido, che ne risulta, ponendo ne' casi speciali in termini di $BQ = CB - PM$ la formula $\frac{p \times \overline{QM}^3}{2r}$, indi facendone la somma; sicchè il medesimo metodo può servire per qualunque altra rotazione d'una figura intorno ad un asse a fine di formarne un solido a piacere.

E S E M P I O I.

351. Giacchè il Cono ABD (Fig. 95.) nasce dalla conversione del triangolo ABC intorno all'asse immobile AC, sarà $\overline{PM}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{AP}^2}{\overline{AC}^2}$; onde la somma di $\frac{p \times \overline{BC}^2 \times \overline{AP}^2}{2r \times \overline{AC}^2}$ sarà

$\frac{p \times \overline{BC}^2 \times \overline{AP}^3}{6r \times \overline{AC}^2}$; e fatto $AP = AC$, $BC = r$, la solidità di

tutto il Cono ABD sarà $\frac{p \times \overline{BC} \times \overline{AC}}{6} = \frac{1}{2} p \times BC \times \frac{1}{3} AC$; vale a dire il prodotto della base nella terza parte dell'altezza, come appunto deve essere.

Co-

COROLLARIO.

352. Dunque il Cono è la terza parte del cilindro, che ha comune con esso la base, e l'altezza.

E S E M P I O II.

353. Sia l'Emisfero BMAND (Fig. 96.) prodotto dalla rotazione del quadrante ABC intorno al raggio immobile AC; fatto $AC = 1$, farà per la natura del cerchio

$PM^2 = 2AP - \overline{AP}^2$, qual valore sostituito nella formula gene-

rale, ne verrà $\frac{2p \times \overline{AP} - p \times \overline{AP}^3}{2r}$, la di cui somma $\frac{p \times \overline{AP}^3}{2r} - \frac{p \times \overline{AP}^3}{6r}$

$= \frac{3p \times \overline{AP}^3 - p \times \overline{AP}^3}{6r}$ darà la solidità del segmento sferico indetermi-

nato MAN; e fatto, che AP divenga AC, e chesia BC, ovvero $AC = 1 = r$, la solidità dell'Emisfero BMAND farà $\frac{3p \times \overline{AC}^3 - p \times \overline{AC}^3}{6} = \frac{1}{3} p \times \overline{AC}^3$; eguale cioè al rettangolo

del raggio BC, o sia AC nella sua periferia da moltiplicarsi nella terza parte del raggio, ovvero al cerchio massimo condotto in due terzi del raggio; onde il doppio di tal quantità, cioè $\frac{2}{3} p \times \overline{AC}^3$, darà la solidità di tutta la sfera, che farà il prodotto del cerchio massimo ne i due terzi del diametro.

Z z

Co-

COROLLARIO I.

354. Dunque il cilindro circoscritto alla sfera, la solidità del quale è il prodotto del detto cerchio massimo nel diametro, starà ad essa sfera, come $1 : \frac{2}{3}$, cioè come $3 : 2$, nella qual ragione starà ancora la metà del cilindro all'Emisfero.

COROLLARIO II.

355. Se si supponga iscritto nell'Emisfero BMAND il Cono BAD, il raggio BC della di cui base eguagli l'altezza AC, la di lui solidità essendo per l'Esempio precedente (351.) il prodotto della base nel terzo dell'altezza, ne verrà, che il detto Emisfero starà a tal Cono iscritto, come $2 : 1$, cioè farà duplo di esso, e in conseguenza la sfera farà quadrupla del medesimo Cono.

COROLLARIO III.

356. Quindi volendosi ridurre a misura il settore sferico CMAN prodotto dalla rivoluzione del settore circolare CMA intorno l'asse AC; al segmento sferico MAN insorto dalla conversione del segmento circolare MAP, che si è ve-

duto, essere $\frac{3r \times AP^3 - r \times \overline{AP}^3}{6r}$, aggiungasi il Cono generato dal rotamento del triangolo CMP, che a norma dell'Esempio I.

(351.)

(351.) si troverà essere $\frac{p \times \overline{PM} \times PC}{6r} = \frac{p}{6r} \times (2AP - \overline{AP}^2) \times (1 - AP)$; e la somma sarà $\frac{p \times AP}{3r}$, ovvero (restituito il valore del raggio) $\frac{p \times AP \times \overline{AC}^2}{3r}$, e fatto $r = AC$, farà

$\frac{p \times AP \times AC}{3}$; cioè il settore sferico in questione eguaglia il doppio del cerchio massimo moltiplicato nel terzo di AP , ovvero il cerchio massimo moltiplicato in due terzi dell'ascissa AP ; sicchè il settore sferico, che coincide coll'Emisfero $BMAND$ sarà eguale al cerchio massimo moltiplicato in due terzi del raggio, come sopra.

E S E M P I O III.

357. Sia da cubarsi la sferoide Ellittica nata dalla conversione della semiellisse ADB (*Fig. 97.*) intorno all'asse trasverso AB ; siccome per le Sezioni Coniche l'equazione all'Ellisse è $\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{AC}^2} \times (2AC \times AP - \overline{AP}^2)$, la misura inde-

terminata di tale sferoide sarà $\frac{p \times \overline{CD}^3}{r \times \overline{AC}^2} \times \left(\frac{2AC \times \overline{AP}^2 - \overline{AP}^3}{6} \right)$;

sicchè fatto $AP = AC$, $r = CD$, si avrà $\frac{1}{3} p \times CD \times AC$, che è la metà della sferoide in questione; e l'intera sferoide sarà $\frac{2}{3} p \times CD \times AC$, intendendo al solito per p la periferia descritta dal semiasse conjugato CD come raggio; onde la solidità dell'emisferoide

Z z z

ADC

364 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

ADC farà eguale al cerchio, il di cui raggio è il semiasse conjugato CD, moltiplicato in due terzi del semiasse trasverso AC; e tutta la sferoide eguaglierà il prodotto di detto cerchio ne' due terzi dell'asse trasverso AB.

COROLLARIO I.

358. Dunque la detta sferoide ellittica starà al cilindro circonscritto, come 2:3.

COROLLARIO II.

359. Per essere il Cono la terza parte del cilindro, che ha eguali ad esso la base, e l'altezza (352.), la detta sferoide ellittica farà doppia del Cono, che ha la medesima altezza AB, e che ha per base il cerchio, il di cui raggio è il semiasse conjugato CD.

COROLLARIO III.

360. Siccome la sfera iscritta nella sferoide in questione ha per raggio il di lei semiasse conjugato CD, la solidità di tale sfera sarà $\frac{2}{3} p \times \overline{CD}^2$ (353.); onde giacchè i raggi de' cerchj massimi sono eguali, la detta sferoide starà alla sfera descritta coll'asse minore CD, come $\frac{2}{3} p \times CD \times$

AC:

$AC: \frac{2}{3} p \times \overline{CD}^2 :: AC: CD$; cioè come l'asse maggiore al minore.

COROLLARIO IV.

361. Similmente siccome la sfera circonscritta alla detta sferoide ha per raggio il semiasse trasverso AC , la solidità di tale sferoide a detta sfera starà come $\frac{2^3 \times AC \times \overline{CD}^3}{6r} : \frac{2^3 \times \overline{AC}^3}{6r}$
 $:: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2$, cioè come il quadrato dell'asse minore al quadrato dell' maggiore.

E S E M P I O IV.

362. Sia da cubarsi una Conoide nata dalla rivoluzione dell'Iperbole Apolloniana AM (*Fig. 98.*) intorno all'asse AP . L'equazione di tale Iperbole è $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{AP}^2} = Q \times AP + Q$
 $\times \overline{AP}^2$, in cui l'asse trasverso $AB=1$, ed il di cui parametro $=Q$; la solidità di tal Conoide sarà $\frac{p \times Q \times \overline{AP}^3}{4r} +$
 $\frac{p \times Q \times \overline{AB}^3}{6r}$; sicchè se l'altezza d'essa Conoide sarà eguale all'asse trasverso AB , cioè se $AP=AB$, la sua solidità sarà
 $\frac{p \times Q \times \overline{AB}^3}{4r} + \frac{p \times Q \times \overline{AB}^3}{6r} = \frac{5p \times Q \times \overline{AB}^3}{12r}$.

Co-

COROLLARIO.

363. Quando l'Iperbole AM fosse equilatera, siccome la sua equazione farebbe $\overline{PM}^2 = AB \times AP + \overline{AP}^2$, per la solidità della sua Conoide si avrebbe $\frac{p \times AB \times \overline{AP}^3}{4r} + \frac{p \times \overline{AP}^3}{6r}$.

E S E M P I O V.

364. Siano da cubarsi infiniti solidi nati dalla rotazione intorno all'asse delle figure comprese nell'equazione generale $\overline{PM}^n = AP \pm \overline{AP}^2$, sarà $\overline{PM}^2 = (AP \pm \overline{AP}^2)^{\frac{2}{n}}$; onde la somma di tal quantità non si potrà, come è visibile, ottenere, se $\frac{2}{n}$ non divenga un numero intero positivo, cioè se non sia $n = \frac{2}{m}$, preso m per un intero; elevata allora la detta quantità alla potenza indicata da tal numero, e moltiplicata la somma fattane nella periferia divisa per la metà del raggio, ne risulterà la cercata solidità; così se $\frac{2}{n} = 2$, cioè se $n = 1$, si avrà $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 \pm 2\overline{AP} + \overline{AP}^4$; onde la solidità cercata sarà $\frac{p \times \overline{AP}^3}{6r} \pm \frac{p \times \overline{AP}^4}{4r} + \frac{p \times \overline{AP}^5}{10r}$.

E-

E S E M P I O VI.

365. Il solido da cubarsi sia una Conoide Parabolica nata dalla rotazione intorno all'asse d'una Parabola di qualunque ordine AM (Fig. 94.) compresa nell'equazione genera-

le $\overline{PM}^n = AP$; farà $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^{\frac{2}{n}}$, onde l'espressione generale indefinita di tali Conoidi, fatta al solito la somma del-

la formula, farà $\frac{np \times \overline{AP}^{\frac{2+n}{n}}}{4r+2nr} = \frac{np \times \overline{PM}^2 \times AP}{4r+2nr}$; sicche fatto $r = BC$, $AC = AP$, per la solidità dell'intera Conoide si

avrà $\frac{np \times BC \times AC}{4+2n} = \frac{1}{2}p \times BC \times \frac{n}{2+n} \times AC$.

C O R O L L A R I O .

366. Quindi se $n=2$, cioè se la Conoide provverrà dal rotamento intorno all'asse della Parabola Apolloniana, la sua solidità farà eguale al prodotto del cerchio, che ne forma la base, nella metà dell'altezza, perchè in tal caso $\frac{n}{2+n} = \frac{1}{2}$; onde tal Conoide farà suddupla del cilindro circoscritto. le &c.

S C O L I O .

367. Si può d'alcuni de' menzionati solidi aver la cubatura anche nel modo seguente.

N. 1.

N. 1. Il triangolo ADI (Fig. 99.) rettangolo in I assieme col circoscrittogli rettangolo BI rotinsi intorno all'asse AI; ne nasceranno un Cono, ed un Cilindro. Intorno all'asse AI descrivasi ora la Parabola Apolloniana AMG rivolta al medesimo con la convessità, e dopo d'averle circoscritto il rettangolo EI, si faccia passare per un punto P preso a piacere sulla AI, la CF parallela alla BE, segante il triangolo in N, e la Parabola in M,

Per esservi l'analogia $\overline{ID}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{AI}^2 : \overline{AP}^2 :: IG : PM$, anche il cerchio col raggio DI, ovvero CP, starà al cerchio col raggio PN, come IG, ovvero PF, a PM, e così sempre; onde facendo la somma, il rettangolo EI starà allo spazio parabolico AMGI, come il cilindro fatto dal rettangolo BI al Cono iscrittogli; ma il rettangolo EI è triplo dello spazio AMGI (85.); dunque anche il cilindro è triplo del Cono iscrittogli.

N. 2. Intorno al medesimo asse AI (Fig. 100.) descrivansi la Parabola Apolloniana AND concava verso di esso, ed un triangolo qualunque AIG rettangolo in I, poscia il resto costruisi come nella figura antecedente. Per essere

$\overline{ID}^2 : \overline{PN}^2 :: AI : AP :: IG : PM$, sarà ancora $\overline{CP}^2 : \overline{PN}^2 :: PF : PM$; onde il cerchio col raggio PC starà al cerchio col raggio PN, come la PF alla PM, e così da per tutto; dunque sommando, il rettangolo EI starà all'iscritto triangolo, come il cilindro fatto dal rettangolo BI all'iscrittogli Conoide parabolica AND, e però il cilindro sarà doppio della Conoide parabolica iscrittagli.

N. 3.

N. 3. Il semicerchio, o la semiellisse HDI (Fig. 101.) assieme col rettangolo circoscritto BI si aggirino intorno all'asse immobile HI, formando così una sfera, ovvero una sferoide, ed un cilindro. Suppongasi ora un'intera Parabola Apolloniana HAI costrutta in guisa, che una delle sue ordinate sia HI, il di cui asse AL prodotto in D dividerà per mezzo la figura HDI; indi descritti intorno ad esse figure i rettangoli BI, HG, si faccia passare per un punto qualunque K preso nella HI la CF parallela all'altro asse AL, che segnerà in N il semicerchio, o la semiellisse, e in M la Parabola, dal qual punto M tirisi l'applicata MP, che sarà alla parallela HI.

Per esser la HI tagliata egualmente in L, e inegualmente in K, sarà $HK \times KI + \overline{KL}^2 = \overline{HL}^2$; ma abbiamo $\overline{HL}^2 : \overline{KL}^2 \left(\overline{PM}^2 \right) :: AL : AP :: KF : FM$; dunque $\overline{HL}^2 : \overline{HL}^2 - \overline{KL}^2 (HK \times KI) :: KF : KF - MF (KM)$; ma per la natura del cerchio, e dell'ellisse $\overline{HL}^2 : HK \times KI :: \overline{LD}^2 (\overline{KC}^2) : \overline{KN}^2$; dunque il cerchio col raggio KC starà al cerchio col raggio KN, come KF:KM, e così da per tutto; sicchè sommando, il rettangolo HG starà all'area Parabolica HAI, come il cilindro fatto dal rettangolo BI, alla sfera, o sferoide; ma l'area Parabolica è due terzi del circoscritto rettangolo; dunque anche la sfera, o la sferoide sarà due terzi del cilindro circoscritto.

N. 4. Generalmente data una figura qualunque ADC (Fig. 102. 103.), la di cui applicata PM, ed a cui sia

A a a

cir-

370 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

circofritto il rettangolo AD, se col metodo esposto superiormente (74.), o in altra guisa costruiscasi, e conoscesi un'altra figura ABC, a cui pure sia circofritto il rettangolo EC, ed ogni di cui applicata PN sia come il quadrato di ogni applicata corrispondente PM, si avrà sempre la cubatura del solido generato dalla rivoluzione della figura ADC intorno all'asse AC, ogni volta che dell'area ABC sia otte-

nibile la quadratura; imperciocchè sarà $\overline{CD} \left(\overline{PH}^2 \right) : \overline{PM}^2 :: \overline{CB} (\overline{PG}) : \overline{PN}$; onde come il rettangolo EC all'area iscritta ABC, così il cilindro AD al solido iscritto ADC; il che costituisce un nuovo metodo per le cubature, da estendersi ancora ad altre curiose speculazioni. Ex. gr. se si vo-

lesse la somma di tutte le potenze \overline{PM}^n competenti alle applicate paraboliche comprese nell'equazione $\overline{PM}^n = \overline{AP}$, in cui n è un numero intero; questa si troverebbe essere general-

mente: $\frac{1}{2} \overline{PM}^n \times \overline{AP}$; cioè nelle Parabole di qualunque ordine in questione la somma delle potenze di qualsivoglia numero d'applicate consecutive eguaglia la potenza della massima applicata condotta nella metà dell'ascissa, o sia del loro numero.

N. 5. Per dar poi un Esempio di questo metodo, che oltre agli altri metodi precedenti favorisce mirabilmente gl'Indivisibili Cavalleriani, immaginiamoci, che una figura Parabolica ADC (Fig. 103.) giri intorno all'asse esteriore AP;

fig-

siccome l'equazione generale ad essa è $PM = \overline{AP}^{\frac{n}{2}}$, si avrà
 $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^{2n}$; l'equazione dunque alla curva ANB, che può
 chiamarsi *cubatrice*, sarà $PN = \overline{AP}^{2n}$, e l'area APN sarà
 $\frac{\overline{AP}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} AP \times PN$; sicchè se $n=2$, tal'area sarà $\frac{1}{5} AP$
 $\times PN$; e però il solido nato dalla rotazione della Para-
 bola Apolloniana intorno all'asse esteriore sarà una quinta
 parte del cilindro circoscritto, ovvero sarà eguale al cerchio,
 che ha per raggio PM, qual cerchio sia moltiplicato in un
 quinto dell'altezza AP. &c.



CAPITOLO OTTAVO.

*Dello spianamento delle superficie
de' corpi.*

§§*§*§*§*

PROPOSIZIONE XXIV.

368.

M*Isurare la superficie del solido nato dalla
rotazione della figura ABI (Fig. 55.) in-
torno all'asse AI.*

Suppongasi, che il solido nato dalla rivoluzione della figura ABI intorno all'asse AI sia tagliato normalmente all'asse da innumerabili piani infinitamente prossimi, e paralleli PM, pm, resterà tutto il solido diviso in tanti Coni retti troncati d'un' altezza inassegnabile Pp, giacchè l'archetto Mm, che forma il loro lato, non differisce sensibilmente da una retta; ma per la Geometria la superficie d'un Cono retto troncato è la metà del rettangolo sotto il suo lato, e sotto la somma delle circonferenze, formanti l'orlo delle due basi opposte, e parallele; dunque non differendo in questo caso tra loro le dette circonferenze, la superficie del Cono infinitesimo in questione (fatta la relazione del raggio alla periferia come $r:p$) farà $\frac{p}{r} \times PM \times Mm$

PARTE SECONDA, CAPITOLO VIII. 373

$Mm = \frac{P \times PM \times MT}{r \times PT}$ (321. N. 5.); sicchè sostituiti i valori, e trovata la somma di questa quantità variabile, si verrà ne' casi speciali in cognizione della ricercata superficie.

COROLLARIO I.

369. Dunque se si farà $PT:TM::PM:PQ$, e così sempre, ne nascerà l'area curvilinea AQP, che starà alla superficie prodotta dalla rotazione della figura AMP intorno all'asse AP, come il raggio alla periferia; ed in fatti per l'analogia $PT:TM::Pp:Mm::PM:PQ$, si avrà $Pp \times PQ = PM \times Mm$, come ancora $\frac{P}{r} \times (Pp \times PQ) = \frac{P}{r} \times PM \times Mm$; onde $Pp \times PQ$, ovvero PQ (256.) starà all'anello formato dalla rotazione della PM assieme con la Mm intorno all'asse AP, come il raggio alla periferia, cioè in una ragione costante, e in conseguenza in tal rapporto starà ancora tutta l'area AQP a tutta la detta superficie.

COROLLARIO II.

370. Condotta la MS normale in M alla curva AM, per essere $PT:TM::PM:MS::PM:PQ$, vedesi, che le applicate PQ della figura AQP sono sempre eguali alle normali corrispondenti MS della curva AM; onde facile renderesi la sua costruzione.

Co-

COROLLARIO III.

371. L'equazione dunque alla curva AQP sarà generalmente $PQ = MS = \frac{PM \times MT}{PT}$, il che concorda con la formula data quì sopra; onde sostituiti in termini di AP gli equivalenti, si avrà l'equazione ne' casi speciali alla detta curva, quale, se sarà quadrabile, farà altresì spianabile la superficie del solido nato dalla figura AMP rotata intorno all'asse AP, facendo, come il semiquadrato del raggio al suo cerchio, così l'area AQP, alla superficie curva in questione.

COROLLARIO IV.

372. Essendo l'area AQP eguale al prodotto di tutte l'applicate PM ne' rispettivi archetti Mm, se queste applicate suppongansi erette normalmente sull'arco AM, ne nascerà un'ungula, che eguaglierà la dett'area; onde se quest'area sarà quadrabile, lo sarà ancora la dett'ungula.

COROLLARIO V.

373. Viceversa nota la curva superficie d'un solido risultante dalla rivoluzione di qualunque figura AMP intorno all'asse AP, si potrà avere tanto la quadratura dell'ungula nata nel modo antedetto, quanto dello spazio corrispondente AQP, quali due aree eguaglieranno il semiquadrato di quel raggio, che forma un cerchio eguale alla nominata curva

va

PARTE SECONDA, CAPITOLO VIII. 375

va superficie; imperciocchè stando questa allo spazio corrispondente AQP, come la periferia al raggio, ne verrà, che tanto la dett'ungula, quanto il nominato spazio, che si eguagliano, eguaglieranno ancora il semiquadrato del raggio di quel cerchio, a cui è eguale la superficie nata dalla rivoluzione della figura AMP intorno all'asse AP.

COROLLARIO VI.

374. Che se farà nota la quadratura, o dell'ungula sovraddetta, o dello spazio AQP, col fare un quadrato doppio di tal area, si avrà nel suo lato, o nella sua radice il raggio di quel cerchio, che eguaglia la superficie prodotta dalla detta rotazione.

COROLLARIO VII.

375. Se col metodo superiormente esposto (166.) costruisca la figura AVDK eguale nell'aree AVNR all'aree corrispondenti AQP della già descritta figura AOI, le di lei applicate RN eguaglieranno le tangenti MT; imperciocchè $PM:PT::MS:MT::PQ:RN$; ma $PQ=MS$ (370.), dunque $MT=RN$; onde facile è ancora della figura ADK la costruzione, come pure n'è facile l'equazione generale $RN=MT$, esprimendo poi ne' casi speciali il valore della tangente MT in termini di $PM=AR$.

Co-

COROLLARIO VIII.

376. Se si descriverà la curva AG (*Fig. 104.*), la di cui funnormale PZ eguagli l'applicata $PQ = MS$ (370.), l'area AQP sarà eguale alla metà del quadrato della PG (156.); onde i femiquadrati dell'applicate di questa curva AG eguaglieranno l'ungule corrispondenti, che nascono dall'alzare l'applicate della curva AMB normalmente agli archi congrui (372.), e l'applicate PG della detta curva AG faranno raggi di que' cerchj, che eguagliano la superficie nata dalla rivoluzione della figura corrispondente AMP, o dell'arco AM intorno all'asse AP (374.).

COROLLARIO IX.

377. In oltre costrutta nella maniera detta poco anzi (375.) sull'asse esteriore AK una figura AVDK eguale nell'area AVNR all'area corrispondenti AQP della figura AOI, le di cui semiordinate RN eguagliano le tangenti MT, descrivasi una curva AX, le di cui funnormali WR eguagliano tali applicate RN, o tali tangenti MT, che le corrispondono, farà $\frac{1}{2} \overline{RX}^2$ eguale all'area AVNR; ma quest'area eguaglia l'area AQP, a cui è eguale $\frac{1}{2} \overline{PG}^2$ per il corollario antecedente; dunque $\frac{1}{2} \overline{RX}^2 = \frac{1}{2} \overline{PG}^2$, e in conseguenza $RX = PG$; onde anche $\frac{1}{2} \overline{RX}^2$ eguaglierà l'ungula inforta dall'in-

PARTE SECONDA, CAPITOLO VIII. 377

innalzamento a perpendicolo dell'applicate PM sull'arco AM, e il cerchio descritto dal raggio RX farà eguale anch'esso alla superficie nata dal rotamento della figura AMP intorno all'asse AP.

COROLLARIO X.

378. Data dunque qualunque curva AM, se si potrà conoscere un'altra curva AG, le di cui funnormali PZ eguagliano le normali MS; ovvero se si potrà conoscere un'altra curva AX, le di cui funnormali WR eguagliano le tangenti MT, si otterrà sempre la misura tanto dell'ungula nata dall'alzar normalmente l'applicate PM sull'arco AM, quanto ancora della superficie del solido generato dal rotamento della figura AMP intorno all'asse AP. Dal che deducesi, che la soluzione di questo Problema può appartenere anche a quel metodo, che chiamasi *Metodo inverso delle Tangenti*.

COROLLARIO XI.

379. Dunque se vi faranno due curve, le tangenti d'una delle quali eguagliano le normali dell'altra, si troverà facilmente il rapporto tra le superficie nate dalla rivoluzione de' loro archi intorno all'asse.

COROLLARIO XII.

380. Restando sempre fisso il medesimo arco AM, non si consideri più riguardo all'asse interiore AP, ma all'este-

B b b

rio-

378 ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA

riore AR; la sottangente farà in tal caso la RH intercetta dall'applicata esteriore MR, e dall'incontro in H della tangente MT coll'asse AR; onde facendo come sopra l'analogia $RH:HM::MR:RN$, e così sempre, ne nascerà l'area AVNR, che si dimostrerà coll'istesso raziocinio stare alla superficie nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'asse AR, come il raggio alla periferia circolare.

COROLLARIO XIII.

381. Quindi l'equazione alla curva VN farà $RN = \frac{HM \times MR}{RH}$; ma in ogni curva la sottangente stà all'ascissa da una parte, come l'ascissa alla sottangente dall'altra (80.); dunque farà $RH = \frac{AP \times PM}{PT}$, come pure $HM = \frac{TM \times AP}{PT}$; sicchè la prima equazione, sostituendo gli equivalenti, scangerà in quest'altra $RN = \frac{AP \times TM}{PM}$; surrogando dunque i valori delle AP, TM in termini di PM, ovvero di AR, si otterrà l'equazione alla detta curva VN ne' casi speciali; qual curva, se farà quadrabile, darà nel lato, o sia nella radice di un quadrato eguale alla sua area AVNR il raggio del cerchio eguale alla superficie nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'asse AR.

COROLLARIO XIV.

382. Quando si voglia ridurre a misura la superficie, che nasce dalla conversione dell'arco BM intorno all'asse BI, quantunque il vertice della curva sia in A, condotta la
tan-

tangente TM a ferire in r la BI prolungata, facciali rE :
 $rM::ME:EF$, e così sempre, ne nascerà l'area BFCI, dal-
 la di cui quadratura dipende la cognizione della proposta su-
 perficie, e la di cui equazione può trovarsi così. Per esser
 simili i triangoli rME , MTP, si avrà $rE:rM::PM:MT$;
 onde $PM:MT::ME(AI-AP):EF = \frac{(AI-AP) \times MT}{PM}$; so-
 stituiti dunque in termini di $PM=BI-BE$ gli equivalenti,
 e fattane, se è possibile, la somma, si otterrà il fine bramato.

E S E M P I O I.

383. N. 1. Sia il Cono ABD (Fig. 95.) nato dalla
 rotazione del triangolo rettangolo ABC intorno l'asse AC,
 farà $PM = \frac{AP \times BC}{AC}$, onde la formula generale, sostituiti i
 valori, diverrà $\frac{p \times BC \times AM}{r \times AC}$; ma $AM = \frac{AB \times AP}{AC}$; dunque
 $\frac{p \times BC \times AM}{r \times AC} = \frac{p \times BC \times AB \times AP}{r \times AC^2}$, la di cui somma è

$$\frac{p \times BC \times AB \times AP^3}{2r \times AC^3}; \text{ fatto dunque } BC=r, AP=AC, \text{ per la}$$

superficie del Cono intero si avrà $\frac{1}{2}p \times AB$; cioè la super-
 ficie del Cono intero eguaglia il prodotto fatto dalla semipe-
 riferia della base nel lato AB, appunto come deve essere.

N. 2. Suppongasi nuovamente un Cono generato dalla
 rivoluzione del triangolo rettangolo ABC (Fig. 108.) in-
 torno all'asse AC, farà per le cose dette (369.) $PQ =$
 $\frac{AB \times PM}{AC}$; ma la ragione di AC ad AB è costante; dunque

B b b 2

la

380 *ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA*

la PQ farà sempre proporzionale alla PM, come ancora alla AP; e però la figura ADC, che ha le PQ per applicate, farà un triangolo anch'essa; in conseguenza la misura indeterminata della superficie conica farà $\frac{P \times AP \times AB \times PM}{2r \times AC}$, e fatto $AP = AC$, $PM = BC$, e preso per raggio BC, cioè fatto $BC = r$, la superficie conica nata dalla rotazione dell'intero triangolo ABC intorno all'asse AC farà $\frac{1}{2} p \times AB$, come sopra.

S C O L I O.

384. La misura della superficie conica si può avere con gran facilità anche in questa maniera. Essendo il contorno BPD (Fig. 105.) della base del Cono ABD una periferia circolare, suppongasì divisa in particelle infinitesime tutte eguali fra loro, una delle quali sia Pp, e a' punti P, p tirinsi dal vertice A le AP, Ap, che faranno linee rette, e formeranno il triangolo infinitesimo APp, la di cui misura è $\frac{1}{2} Pp \times AP$; ma tutta la superficie conica può esser divisa in tanti triangoletti APp eguali tutti fra loro; dunque la misura della superficie del Cono si avrà moltiplicando la semiperiferia della base nel lato di esso.

E S E M P I O II.

385. N. 1. Sia AMB (Fig. 104.) un arco di cerchio, il di cui centro S; Per aver esso la normale costante, che è
il

PARTÈ SECONDA, CAPITOLO VIII. 381

il raggio MS , la figura AQP diverrà un rettangolo, le di cui applicare PQ faranno eguali al raggio MS , ovvero AS (370.); onde l'ungula, che nasce da' seni retti PM alzati normalmente sull'arco circolare AM , farà eguale al rettangolo del raggio nel seno verso (372.), cioè a SAP . Questo rettangolo poi stà alla superficie sferica generata dall'arco AM , come il raggio AS alla sua circonferenza, ovvero (moltiplicato tanto il raggio AS , che la sua circonferenza per AP) come il medesimo rettangolo SAP , alla superficie cilindrica nata dalla AP condotta nella circonferenza, il di cui raggio AS ; il che si uniforma a quanto ha dimostrato Archimede, cioè che le porzioni, o zone di superficie sferica eguagliano le porzioni, o zone egualmente alte d'una superficie cilindrica circoscritta.

N. 2. Sia nuovamente AMB un arco circolare, il di cui centro S ; Per essere la normale MS l'istessa cosa che il raggio, la figura AGP farà una Parabola Apolloniana (378.), il di cui parametro $2MS$; onde la PG , che è il raggio di quel cerchio, che eguaglia la superficie sferica insorta dal rotamento dell'arco AM intorno l'asse AP , farà media proporzionale tra $2MS$, e AP ; ma tal media proporzionale è ancora nel cerchio la corda AM ; dunque le porzioni di superficie emisferica sono eguali a' cerchi, che hanno per raggi le corde corrispondenti, come appunto dimostrò Archimede.

COROLLARIO I.

386. Dunque tanto per il *N. 1.*, che per il 2. di quest' Esempio, la superficie totale d'una sfera farà quadrupla del cerchio massimo d'essa sfera. Co-

COROLLARIO II.

387. Nella medesima sfera le superficie generate dalla rivoluzione degli archi stanno come l'altezze degli archi medesimi; e in due sfere ineguali le superficie generate dalla rivoluzione degli archi stanno in ragion composta delle altezze degli archi medesimi, e de' diametri, ovvero de' raggi; sicchè le superficie sferiche in qualunque luogo di due sfere eguali, o ineguali possono dividerfi in qualunque ragione.

COROLLARIO III.

388. Giacchè per il N. 2. di questo Esempio, il cerchio, il di cui raggio è la corda AM, eguaglia la superficie sferica nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'asse AP, la metà del quadrato di tal corda dovrà eguagliare l'ungula risultante da' seni retti PM innalzati normalmente sull'arco AM (373.); e in fatti la metà di tal quadrato eguaglia il rettangolo SAP, cioè il rettangolo del raggio nel seno verso, come appunto si è dimostrato nel N. 1. di questo Esempio.

E S E M P I O III.

389. N. 1. Sia AM (*Fig. 106.*) una Trattoria, il di cui asintoto IF; siccome la sua tangente è costante, la quadratura dell'ungula nata dal porre a perpendicolo l'applicate PM

PM full' arco indefinito MA farà eguale al rettangolo della tangente MT nell'applicata PM (375.); onde tal rettangolo starà alla superficie inforta dalla rotazione di tal curva intorno all'asintoto IF, come il raggio alla periferia; fissato dunque PM per raggio, e moltiplicando il terzo, e quarto termine per MT, il rettangolo TMP starà alla detta superficie, come il medesimo rettangolo TMP alla superficie di un cilindro risultante dalla periferia del raggio PM condotta nell'altezza della tangente MT; ma tal superficie cilindrica è per la Geometria eguale al cerchio che ha per raggio $\sqrt{(2MT \times PM)}$; dunque la superficie in questione della Trattoria farà anch'essa eguale al cerchio, che ha per raggio $\sqrt{(2MT \times PM)}$, cioè la media proporzionale tra il doppio della tangente, e l'applicata.

N. 2. Sia nuovamente AM una Trattoria intorno al suo asintoto IF; sulla sua base IB parallela all'applicata PM descritta una Parabola Apolloniana IX, la di cui sunnormale WR eguagli la tangente MT, la sua applicata RX farà il raggio di quel cerchio, ch'eguaglia la superficie nata dalla rotazione dell'indefinito arco MA intorno all'asintoto PF (377.), ma questa RX è media proporzionale tra la IR, e il doppio della WR per la natura della Parabola; dunque la detta superficie nata dalla rotazione dell'indefinito arco MA della Trattoria intorno l'asintoto PF farà eguale a quel cerchio, il di cui raggio è medio proporzionale tra l'applicata PM, e il doppio della tangente MT, cioè $\sqrt{(2MT \times PM)}$.

Co-

COROLLARIO I.

390. Quando PM divenga eguale a MT, cioè quando la massima applicata BI sia il termine della figura, allora della Pa-

rabola IX l'applicata $BD = \sqrt{2MT^2} = \sqrt{2IB^2}$ farà il raggio del cerchio eguale alla superficie del solido generato dalla figura indefinita BMAFI rotata intorno l'asintoto IF; onde la total superficie di questo solido eguaglia quell'area circolare, il di cui raggio è la diagonale del quadrato della IB massima applicata, o della tangente MT.

COROLLARIO II.

391. La superficie generata dall'arco indefinito MA nel suo rivolgimento intorno l'asintoto PF starà a quella prodotta in simil guisa da un'altr'arco indefinito BMA, come $\sqrt{PM} : \sqrt{IB}$, cioè in ragion sudduplicata delle rispettive applicate PM, IB.

COROLLARIO III.

392. Siccome l'ungula indefinita proveniente dal porre a perpendicolo sull'arco indefinito MA tutte l'applicate PM, andando verso A, eguaglia il rettangolo $MT \times PM$, tali ungule staranno tra loro, come le rispettive applicate.

Co-

COROLLARIO IV.

393. Preso nell'asintoto IF qualsivoglia punto E, se col raggio ES=MT descrivasi il quadrante EGS, indi prolungata l'applicata MP in N, tirisi la corda EN, la superficie sferica nata dalla rotazione della periferia EN intorno all'asse EP starà a quella prodotta dall'arco indefinito MA intorno all'asintoto PF, come EP:PM; dimodochè se EP=PM, anche la prima superficie sferica eguaglierà la seconda superficie del solido della Trattoria. Che se il raggio SE del quadrante EGS sia preso ad arbitrio, la superficie sferica starà a quella del corrispondente solido della Trattoria, come $2ES \times EP : 2MT \times PM$, cioè in ragion composta di quella del raggio ES alla tangente MT, e di quella del seno verso EP all'applicata PM.

E S E M P I O IV.

394. L'equazione alla curva AM (Fig. 104.) sia generalmente $AP = \overline{PM}^n$, cioè all' infinite Parabole; la sot-

tangente PT farà nAP , onde essendo $\frac{MT^2}{PT^2} = 1 + \frac{PM^2}{PT^2} = 1 +$

$\frac{1}{n^2} \overline{AP}^{\frac{2}{n}-2}$, l'equazione generale in tal caso alla curva AQ

farà $\overline{PQ}^2 = \frac{PM^2 \times MT^2}{PT^2} = \overline{AP}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2} \overline{AP}^{\frac{2}{n}-2}$; quando dunque

C c c

fi

si potrà ne' casi speciali ottenere la quadratura della curva AQP indicata da tal equazione, tal quadratura moltiplicata in $\frac{r}{r}$ darà la misura della superficie richiesta della Conoide Parabolica.

COROLLARIO I.

395. Quando sia $n=2$, allora si avrà $\overline{PQ}^2 = AP + \frac{r}{4}$
 $= \frac{4AP+r}{4}$; qual equazione è ad un'altra Parabola Apolloniana troncata AFDI (Fig. 107.) rivolgente la cavità all'asse AP; imperciocchè fatta $AE = \frac{r}{4}$, e supposto, che il parametro di detta Parabola intera EFDI sia 1, si avrà $\overline{PQ}^2 = AP + \frac{r}{4} = \frac{4AP+r}{4}$; onde l'area della Conoide Parabolica nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'asse AP farà $\frac{(4p \times AP + p) \times \sqrt{(4AP+r)} - p}{12r}$; ovvero fatto il lato retto, o parametro $1=L$, e cangiato in termini di PM il valore di AP, la superficie di detta Conoide farà $\frac{(4p \times PM^2 + p \times L^2) \times \sqrt{(4PM^2 + L^2)} - p \times L^2}{12r \times L}$; e in conseguenza l'ungula, che proviene dal porre l'applicate PM a perpendicolo sull'arco AM, farà quadrabile.

Co-

COROLLARIO II.

396. Se fosse $n = 1$, l'equazio ne farebbe $PQ = PM \times \sqrt{2}$, la di cui somma è $\frac{1}{2}PM \times \sqrt{2}$; onde la superficie, che farebbe di un triangolo rettangolo equicrura ACB (Fig. 86.) rotato intorno l'asse AC, fatto $PM = BC = r$, si troverà, essere $\frac{1}{2}p \times BC \times \sqrt{2} = \frac{1}{2}p \times \sqrt{2}BC$, cioè il prodotto della semiperiferia della base nel lato AB, come sopra (383. 384.).

S C O L I O I.

397. Finchè il valore d'una variabile viene espresso in soli termini dell'altra, gli esposti metodi possono facilmente adoperarsi; ma quando i termini d'amendue le variabili sono mescolati insieme, e che si vogliano ritenere, e distinguere le quantità infinitesime dell'una da quelle dell'altra, si può ricorrere ad una speciale caratteristica; ed ecco che ci andiamo ad immergere nel famoso calcolo Newtoniano delle flussioni, e de' fluenti, o nel calcolo differenziale, e integrale Leibniziano, che coincide col Newtoniano, la caratteristica del qual calcolo Leibniziano, che porta seco il dx , o il dy &c. è più generalmente ricevuta.

Quindi raccogliasi in primo luogo, che le due regole fondamentali di questo calcolo si sono dimostrate direttamente con la sola Geometria senza ricorrere alli spazj descritti, alle velocità, ed a' tempi, il che parmi, che fosse finora tra

C c c 2

le

le cose desiderate ; resta dunque l' importantissima scoperta di tal calcolo confermata , ed ogni suo contegno messo al coperto da qualunque sospetto , che potesse cadervi , giacchè essendo i principj di questo calcolo più metafisicamente , che geometricamente dimostrati , non soddisfanno pienamente chi ne vuol essere in possesso , se non dopo d' aver osservato , che la di loro applicazione allo scioglimento de' problemi corrisponde esattamente alle dimostrazioni già fatte con la pura Geometria ; anzi non mancano persone , che quantunque intendenti d' esso calcolo , e che ne abbiano sempre osservato esatto il riscontro , non possono , come il dottissimo Abate de Gua , liberarsi da un perpetuo scrupolo in occasione di doverli prestare onninamente l' assenso .

In secondo luogo comprendesi manifestamente , che il suddetto calcolo non è altro nel suo fondo , che la dottrina degl' Indivisibili tanto promossa dal P. Cavalerio , dal Torricelli , e dal de Angelis , la di cui origine per altro debbesi all' immortale Galileo , che ne fe comparire i primi vestigi nel Dialogo I. dove parla d' un cilindro scavato per mezzo d' un' emisfero , e nel Dialogo III. del moto uniformemente accelerato , Prop. I. Per tal ragione io ho chiamato il metodo da me geometricamente esposto , *metodo degl' Indivisibili* , lasciando agli altri la libertà di nominarlo a lor modo , quantunque la giustizia vorrebbe , che si dovesse chiamare col nome datoli da' primi Inventori . In fatti il Des-Cartes trovato all' applicata (ch' è l' indivisibile Italiano) un equivalente in termini dell' ascissa , se ne servì molto felicemente per assegnare l' equazioni alle curve ; il Wallis formò sull' innanzi degl' indivisibili la sua Aritmetica degl' Infini-
ni.

PARTE SECONDA, CAPITOLO VIII. 389

niti; e il Newton lavorando full' orme dell' Ugenio, dello Slafio, e del Barrowio il suo celebre calcolo, li ridusse non pensandovi alla perfezione, benchè li dispregiasse nell'atto istesso, che inavvertentemente se ne serviva per fabbricarvi sopra la sua gloria.

S C O L I O II.

398. Giacchè si è parlato transitoriamente del calcolo infinitesimale, mi sia permesso di fare una riflessione sopra la comune dimostrazione d'una delle sue operazioni principali. Dall'essere il differenziale di $xy = xdy + ydx$, ricavasi da M. de l'Hospital, dal Wolfio, e da altri Analisti, che il differenziale di $\frac{x}{y}$ sia $\frac{ydx - xdy}{yy}$; ma il differenziale di xy può, come essi Autori confessano, essere ancora $x dy - y dx$ quando al crescere d'una coordinata x , l'altra y v'è scemando; dunque in tal supposto il differenziale di $\frac{x}{y}$ deve essere $\frac{ydx + xdy}{yy}$, ed è conne la dimostrazione. Sia $\frac{x}{y} = v$; farà $x = yv$; $dx = ydv + vdy$ nel caso suddetto che una coordinata v decrezca all'augmentarsi dell'altra y ; quindi $dx + vdy = ydv$; $dx + \frac{xdy}{y} = ydv$; $\frac{dx}{y} + \frac{xdy}{yy} = dv$; $\frac{ydx + xdy}{yy} = dv$. Se si volesse, che la coordinata y diminuisse, mentre cresce l'altra v , allora il differenziale di $\frac{x}{y}$ si troverebbe essere $\frac{xdy - ydx}{yy} = dv$; ma amendue queste formule sono erronee, il che può conoscersi dal metterle in uso, anche come superiormente si disse (292.), ed è vera soltanto la prima, cioè $\frac{ydx - xdy}{yy}$; dunque la dimostrazione generale fatta per provare, che il dif-

fe-

ferenziale di $\frac{x}{y}$ sia $\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2}$, non è esatta, perchè potendosi col di lei metodo trovare tre casi, uno vero, e due falsi, conduce tanto alla verità, che all'errore,

Se replicassero, che dall'aver fatto $x = yv$, ne viene, che al crescere della coordinata y deve crescere l'altra v , risponderò, che erano in obbligo di provarlo; ma io dimostrerò, che può essere anche il contrario; imperciocchè

sia l'equazione $y^m = x$; fatto al solito $\frac{x}{y} = v$, e sostituiti

gli equivalenti, sarà $\frac{x}{y^m} = v$, ovvero $x^{1-\frac{1}{m}} = v$; sicchè

quando la quantità $1 - \frac{1}{m}$ sia negativa, l'equazione alla nuova curva, la di cui applicata sia v , farà sempre all'Iperboli tra gli asintoti, e perciò al crescere delle coordinate x , y dovrà decrescere l'applicata v ; in tal caso il differenziale

di vy , che eguaglia quello di $v x^{\frac{1}{m}}$, farà di comun consenso $ydv - vdy$, quando v rappresenti l'ascissa, y l'applicata; ovvero $vdv - ydy$, quando y rappresenti l'ascissa, v l'applicata; onde differenziando l'equazione $x = vy$, il differenziale non solo potrà essere $dx = vdy + ydv$, ma ancora $dx = ydv - vdy$, ovvero $dx = vdy - ydv$; dal che confermasi, che la detta dimostrazione può condurre tanto alla verità, che all'errore; e che in conseguenza hanno avuto qualche ragione alcuni Geometri a vivere inquieti sull'operazioni primarie del detto calcolo, per essere tanto astrattamente dimostrate.

CA.

CAPITOLO NONO.

*Della misura delle superficie rispetto
alle solidità, che comprendono.*

* * * * *

PROPOSIZIONE XXV.

399.

Quanto più si viene a scemare un corpo di mole, più cresce la sua superficie rispetto alla mole rimanente.

Non si può fare una fezione di qualunque corpo, senza che nascano due nuove superficie, appartenente ciascuna al suo pezzo diviso dall'altro; questi pezzi adunque prima d'esser difiniti venivano coperti da minor superficie, cioè la loro solidità aveva meno parti scoperte; ma queste parti più si scuoprano, più che si replicano le fezioni, vale a dire, più superficie nascono, più che si diminuisce il corpo; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

400. Quanto dunque più piccolo è un corpo, tanto è maggiore la sua superficie riguardo alla solidità, che contiene.

Scq.

S C O L I O.

401. Un Cubo tagliato per mezzo con un piano parallelo alle sue facce perde un terzo di superficie, e un mezzo di solidità, poichè la sua superficie dopo il taglio sta a quella di prima, come 2:3; ma la sua solidità nella medesima circostanza è come 1:2. Parimente se il Cubo medesimo farà nell'istesso modo tagliato da un piano nella terza parte della sua altezza, la superficie della parte maggiore farà all'intera, come 7:9; e la solidità del medesimo pezzo riguardo alla totale, come 3:2. Taglisi una sfera per mezzo; la superficie della metà recisa relativamente a quella di tutta la sfera solida è come 3:4; ma la solidità nel medesimo caso è come 1:2. Dividasi per mezzo un Cubo con un piano, che passi perpendicolarmente per il diametro d'una delle sue facce, incommensurabile, e però inesprimibile in numeri esatti è il rapporto, che ha il piano nato dalla detta sezione con una delle sue facce, ma vedesi manifestamente, che la solidità divisa rispetto all'intera, è come 1:2; ma la superficie nata dalla detta sezione è sempre maggiore della metà del Cubo intero.

PROPOSIZIONE XXVI.

402. *Le superficie rispetto alle comprese solidità in due corpi di qualunque specie stanno in ragion composta della diretta di lor medesime, e della reciproca delle solidità, che comprendono.*

Siano i corpi A, B, e la superficie del corpo A sia s ; la solidità, o la massa compresavi sia m ; la superficie del

del corpo B sia S , e la massa, o solidità contenutavi sia M ; le superficie, e le solidità si concepiscono come quantità omogenee, altrimenti non se ne potrebbe avere il rapporto; in quella guisa, che quantità omogenee si considerano a tal fine da' Geometri lo spazio, la velocità, e il tempo. Per aver poi il rapporto di due ragioni, se ne debbono confrontare gli esponenti, e questi si hanno col dividere il primo termine di ciascuna ragione per il secondo; i due esponenti adunque delle ragioni, che quì si cercano, sono $\frac{s}{m}$, $\frac{S}{M}$; onde la superficie del corpo A rispetto alla compresavi solidità, alla superficie del corpo B relativamente alla solidità contenutavi starà nel rapporto di $\frac{s}{m} : \frac{S}{M}$; ma riducendo le frazioni al medesimo denominatore, si ottiene $\frac{s}{m} : \frac{S}{M} :: \frac{sM}{Mm} : \frac{Sm}{Mm} :: sM : Sm$; resta dunque dimostrata la Proposizione.

COROLLARIO I.

403. Se le solidità saranno eguali, si metteranno in conto le sole superficie prese direttamente; così se di due sfere eguali riducasene una a cilindro, non si considera altro, tralasciata la solidità, che il rapporto, che ha la superficie del cilindro a quella della sfera.

COROLLARIO II.

404. Ma se restano eguali le superficie, varieranno le solidità, si computeranno inversamente le sole solidità; così in questo caso la superficie del corpo minore starà a quella
D d d del

del maggiore, rispettivamente alle solidità, che ricoprono; come la solidità del maggiore a quella del minore.

COROLLARIO III.

405. Se poi le superficie staranno in ragion diretta delle solidità, verrà il caso d'eguaglianza, il che è manifesto; imperciocchè il corpo A abbia 1. di superficie, e 4. di solidità, ed il corpo B abbia 4. di superficie, e 16. di solidità, la superficie del corpo A rispetto alla solidità, che abbraccia, sta alla superficie del corpo B riguardo alla solidità, che ricopre, come 16:16; o come 1:1; cioè in proporzione d'eguaglianza; nè ciò altera l'enunciazione, che quanto più un corpo perde di solidità, tanto più acquista relativamente ad essa di superficie, il che non ha bisogno di prova.

S C O L I O I.

406. Se imprendasi il calcolo ne' cubi, e suppongasi uno doppio d'un'altro, la superficie del minore a quella del maggiore nella data ipotesi troverassi stare, come 2:1. Se l'uno è 27. volte maggiore dell'altro, la superficie del minore sta col detto riguardo a quella del maggiore, come 3:1. Se l'uno è 64. volte maggiore dell'altro, quella del minore a quella del maggiore starà rispetto alla solidità, come 4:1. Se l'uno è 125. volte maggiore dell'altro, la superficie del minore starà sull'istessa idea a quella del maggiore, come 5:1; e così in seguito. Ciò può applicarsi non solamente alle sfere, quanto ancora a' corpi simili, donde ricavasi il seguente

Tco-

Teorema I. Se faranno due corpi simili, che stiano in qualunque ragione tra loro, la superficie del minore riguardo alla compresa solidità starà a quella del maggiore rispetto alla solidità, che contiene, in ragione inverfa delle loro radici, se sono cubi; de' loro diametri, se sono sfere; e generalmente de' loro lati omologhi, se sono corpi simili.

407. Invece poi di considerate due corpi simili, si considerino ora più corpi simili eguali fra loro, ed eguali parimente nella loro somma ad un' altro simile, e segua si a fare il calcolo addosso a' cubi. Se questi si suppongano in numero di otto eguali tutti insieme nella solidità ad un solo cubo, si troverà, stare tutta la somma della loro superficie a quella del solo cubo, come 2: 1; Se i cubi eguali faranno 27., la somma delle loro superficie starà a quella d' un cubo, che in se tutti li comprenda, come 3: 1; e così in seguito. Da quest' ipotesi adunque ricavasi la misura istessa del Teorema antecedente, il che forma il seguente

Teorema II. Se più corpi simili, ed eguali presi tutti insieme faranno eguali ad un corpo simile ad uno di loro, la superficie di tutti quelli sommata, e paragonata con la superficie di questo solo, starà in ragion reciproca delle loro radici, se sono cubi; de' loro diametri, o semidiametri, se sono sfere, e generalmente de' loro lati omologhi, se sono corpi simili.

Nelle figure poi irregolari, è chiaro, non potersi formare una serie costante, quantunque cognite le loro superficie, e le loro solidità, se ne possa nella data idea trovar sempre la detta relazione, per la generalità della presente Proposizione.

S C O L I O. II.

408. Se invece delle superficie si volessero nelle sfere paragonare fra loro i raggi rispetto alle solidità, o generalmente ne' corpi simili i lati omologhi relativamente ad esse solidità, replicando il medesimo raziocinio (395.), si troverà, che stanno fra loro in ragione composta della diretta d'essi raggi, o lati omologhi, e della reciproca delle solidità ad essi annesse. Parimente ne' corpi simili i lati omologhi rispetto alle superficie, che tali corpi accompagnano, staranno fra loro in ragion composta della diretta di essi lati omologhi, e della reciproca di dette superficie. Dal che ravvisasi, che questi lati omologhi crescono più riguardo alle solidità, che alle superficie. Questo metodo è poi applicabile anche ad altre quantità paragonate in simil guisa fra loro.

APPENDICE I.

409. Nel trattare al Capitolo VI. (317. e seg.) della rettificazione delle Curve, mi uscì di mente l'avvertire, che supposto, essere la Curva AQ (Fig. 104.) la rettificatrice dell'arco AM, cioè tale, che le sue applicate PQ eguagliino le corrispondenti tangenti Hr (318.), se s'immaginerà la Curva AG, le di cui funnormali PZ eguagliino le PQ, o le Hr, siccome il semiquadrato della PG eguaglia l'area AQP (156.), ne verrà, che l'arco AM farà quarto proporzionale dopo la presa quantità costante, l'applicata PG, e la di lei metà; onde quando possa costruirsi intorno al me-
de-

desimo asse AP una Curva AG, le di cui funnormali PZ eguagliano la tangente H ϵ della data Curva AM, si potrà ottener sempre la sua rettificazione. Il medesimo discorso facciassi riguardo alla Curva VN, che sia anch' essa rettificatrice di detto arco AM, cioè che abbia l' applicata RN eguale alla tangente H ϵ (318.); perchè potendosi costruire intorno all' asse anteriore AK la Curva AX, la di cui funnormale WR eguagli la RN, ovvero la H ϵ , il semiquadrato dell' applicata RX diviso per la presa quantità costante eguaglierà il dato arco AM; il che dimostra, che il Problema della rettificazione delle Curve può risolversi anche col *Metodo inverso delle Tangenti*.

Generalmente poi farà quadrabile qualunque data Curva AQ, quando sia costruibile la Curva AG di tal natura, che la sua funnormale PZ eguagli l' applicata PQ d' essa data Curva; qual Curva AG vien detta per tal motivo da' Geometri *Quadratrice* della Curva AQ; sicchè le quadrature, e le rettificazioni delle Curve, le cubature de' solidi, e li spianamenti delle loro superficie si potranno tentare, quando si voglia, anche col detto *Metodo inverso delle Tangenti*.

APPENDICE II.

410. Era stato da me tralasciato il metodo generale per trovar geometricamente gl' Indivisibili di qualunque grado, perchè mi sembrava molto ovvio; pure per soddisfare chi lo bramasse, e per rimettere i detti Indivisibili maggiormente nel loro credito, l' accennerò non solo molto semplice, spedito, e facile, ma dipendente soltanto dalla Proposizione X. (140.).

Sia

Sia pertanto la figura AMBI (Fig. 63. 64. 65. 66. 67.); della di cui applicata PM cerchisi l'indivisibile, o elemento del primo grado. Costrutta intorno al medesimo asse AP la figura AYI tale, che le di lei aree AXP (Fig. 63. 64. 65. 66.), ovvero PZX (Fig. 67.) siano proporzionali alle corrispondenti applicate PM, è manifesto, che la PX esprimente l'indivisibile dell'area AXP, ovvero PZX, denoterà altresì quello dell'applicata PM; ma tirata al punto M la tangente TM, abbiamo l'equazione $PT \times PX = PM$, e però $PX = \frac{PM}{PT}$; dunque l'indivisibile dell'applicata PM sarà $\frac{PM}{PT}$, cioè l'istessa applicata divisa per la sottrangente.

Tirinsi ora l'infinitamente prossime PM, pm , e dal punto M conducasi la Mo parallela all'asse AP. Se si supponrà tutto quest'asse diviso in particelle infinitesime eguali Pp , alle quali corrispondano l'applicate PM, pm , fatta ciascuna $Pp = 1$, si avrà l'analogia $mo : 1 :: PM : PT$; onde $mo = \frac{PM}{PT} = PX$; dunque ogni differenza infinitesima mo equivale all'indivisibile, o elemento dell'applicata PM.

411. Quindi subito riconoscesi, che l'indivisibile, o elemento d'una quantità costante è eguale a zero, perchè se la figura AMBI fosse un rettangolo, le sue applicate non avrebbero differenza alcuna. In fatti in tal caso l'altra figura AYI sarebbe un'Iperbole Apolloniana tra gli asintoti, sicchè l'indivisibile d'una quantità costante sarebbe tutt'insieme variabile, infinito, ed eguale a zero, il che è un inconveniente.

412. Volendosi poi l'indivisibile della variabile PX, o sia della mo , ovvero l'elemento del secondo grado della PM; de-

PARTE SECONDA, CAPITOLO IX. 399

defcritta intorno al medefimo afle AP una figura AQSI, le di cui aree AQP (*Fig. 63. 65.*), ovvero PZQ (*Fig. 64. 66. 67.*) ftiano come l'applicate PX della figura AYI, proporzionale nell'aree all'applicate PM, l'applicata, ovvero l'indivifibile, PQ di tal figura AQSI farà l'indivifibile, o l'elemento richiefto. Tirata dunque al punto X la tangente aX, per effervi l'equazione $PX = aP \times PQ$, fi avrà $PQ = \frac{PX}{aP}$, onde pofto quefto valore in termini di PM, fi otterrà l'indivifibile del fecondo grado della variabile PM, o fia l'indivifibile dell'infinitefima mo.

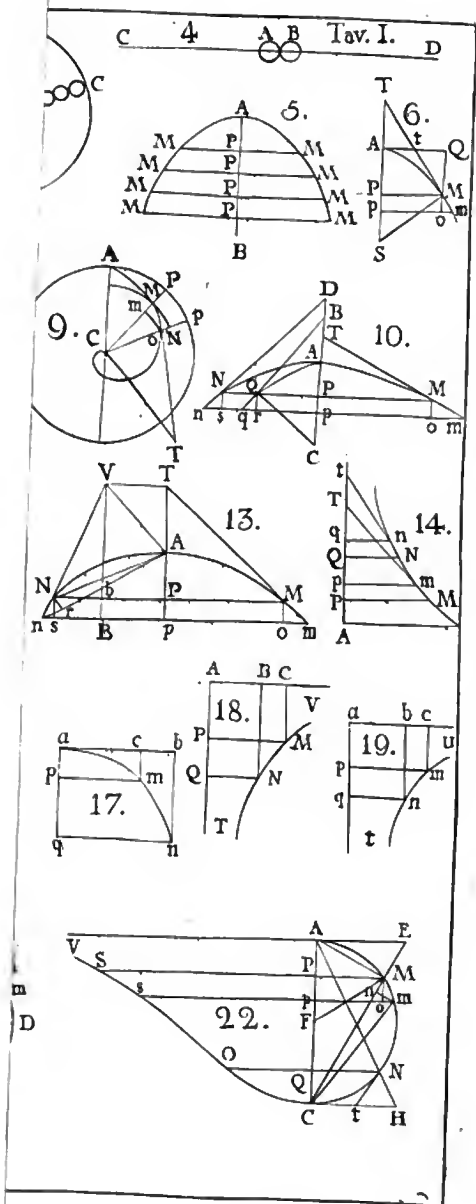
413. In tal guifa procedendo, fi troveranno, quando fi vogliano, gl'indivifibili, o elementi degli altri gradi fuperiori, e fe ne potrà fiffare in confequenza la regola fondamentale, che non differirà, com'è chiaro, dalla già afsegnata in occafione di trovare gl'indivifibili, o elementi del primo grado.

414. Merita intanto rifleffione, che riguardo all'applicata i fuoi elementi, o infinitamente piccoli di qualunque grado all'infinito poffono effer rappresentati da linee tutte afsegnabili; e rifpetto all'afciffa le potestà del fuo elemento fono fempre esprimibili per l'unità. Ma l'afcio a chi ha più ozio, e più penetrazione di me, che altrove fono occupato, il rincarire fu quefti metodi.

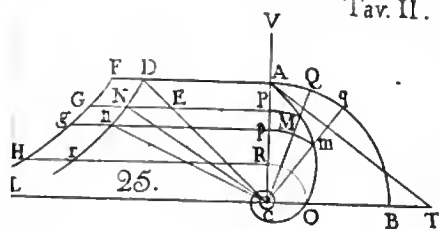
415. E quì mi fia concefso di ripetere nuovamente la genefi delle figure geometriche dall'appofizione più tofto che dal fluffo, tornando a dire in primo luogo, che per punto debbefi intendere un eftenfione inafsegnabile in lunghezza, larghezza, e profondità. In fecondo luogo che la linea debbefi concepirc come rifultante d'innnumerabili punti pofiti confecutivamente al contatto, i quali o confervano l'ifteffa di-

rezione, ed allora ne nasce la linea retta, o mutano continuamente direzione, ed allora formasiene la linea curva, e perciò la linea ha lunghezza assegnabile, ma larghezza, e profondità inassegnabili. In terzo luogo, che la superficie si può immaginare come composta d'una moltitudine di linee poste per fianco l'una accanto all'altra, le quali o posano tutte sull'istessa linea retta, ed allora generano la superficie piana, o posano sopra una linea curva, ed allora producono una superficie curva; sicchè la superficie possiede una lunghezza, ed una larghezza amendue assegnabili, ed una profondità inassegnabile. In quarto luogo, che il solido può esser ideato come nascente dall'esatto combaciamento d'innumerabili superficie piane, o curve poste l'una sull'altra, ed allora il solido risultatone può esser rettilineo, o curvilineo, o in parte l'uno, in parte l'altro; e perciò il solido è dotato di lunghezza, larghezza, e profondità tutte assegnabili. In tal guisa la Composizione delle Figure Geometriche farebbe in quanto a me più chiara, e più comoda, come quella, che non solo più confacente troverebbesi al metodo semplice degl'Indivisibili presi nel loro vero senso, quanto ancora al retto pensare; giacchè trattandosi di cose sottoposte all'umana intelligenza, implica contraddizione, che il punto supposto realmente inesistente sia suscettibile di movimento (P. I. 89.).

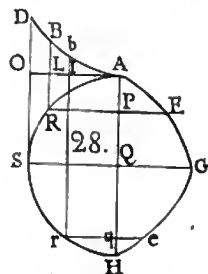
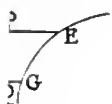
Fine del Primo Tomo.



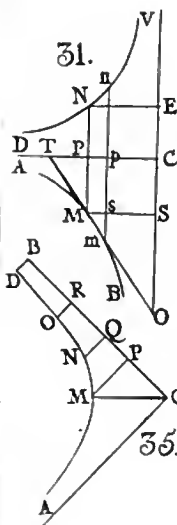
Tav. II.



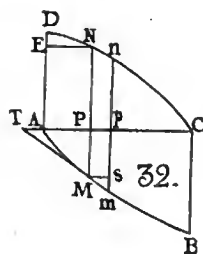
27.



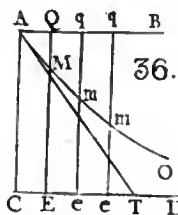
31.



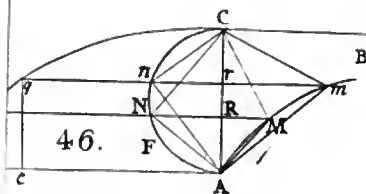
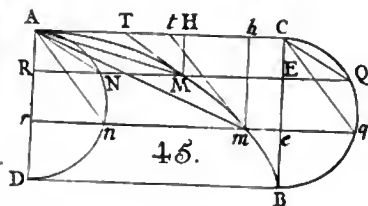
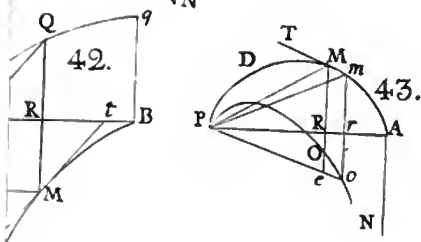
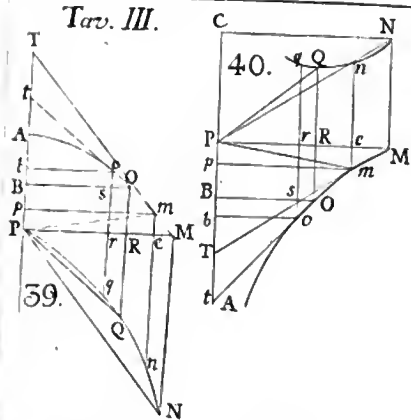
32.

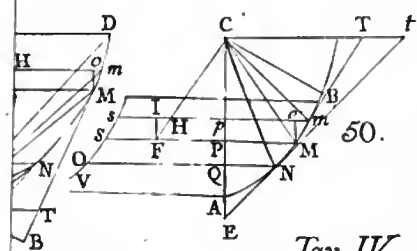


36.

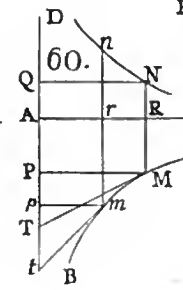
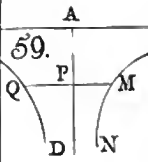
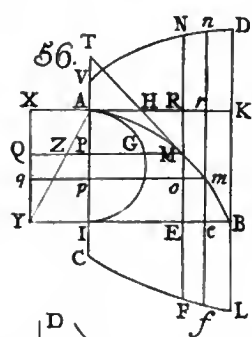
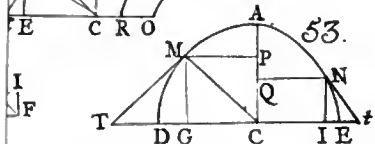
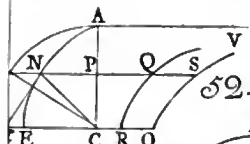


Tab. III.

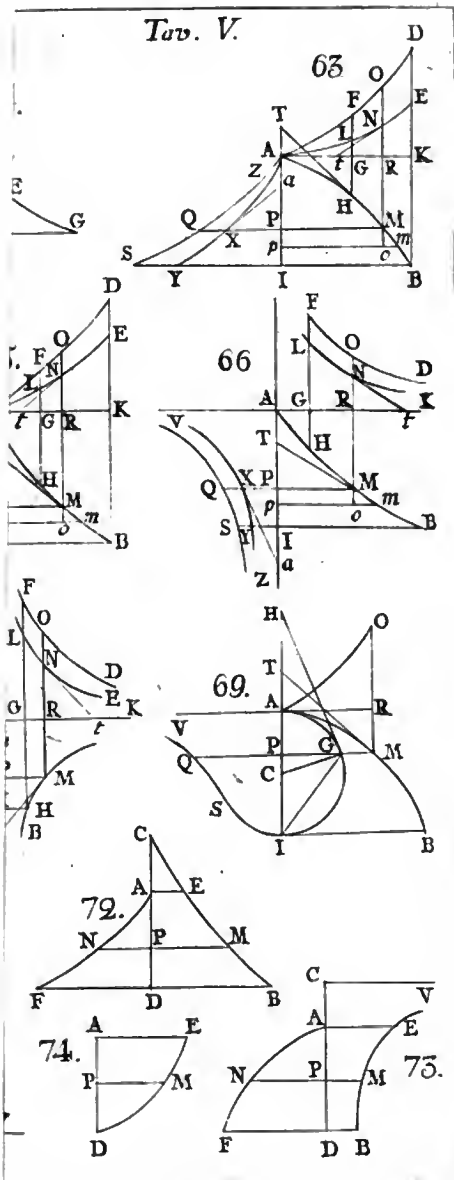


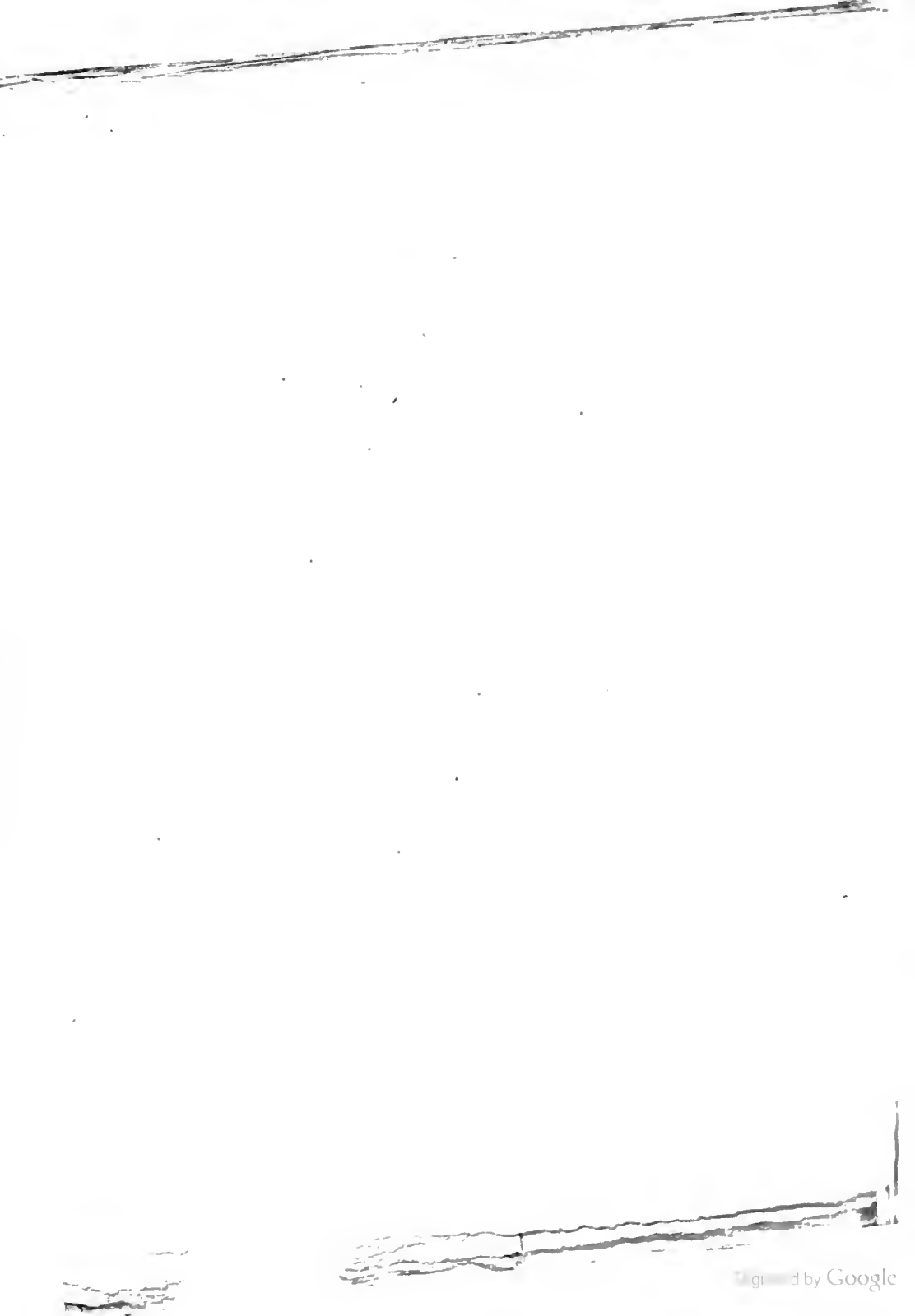


Tav. IV.

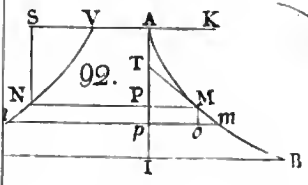
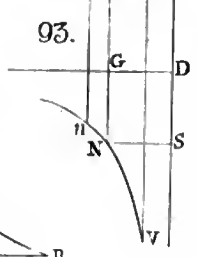
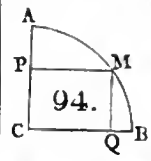
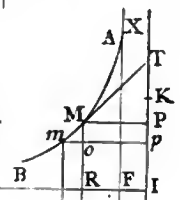
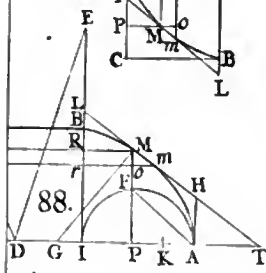
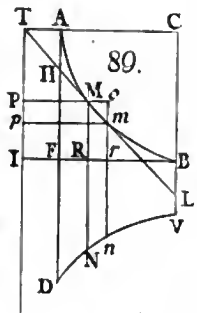
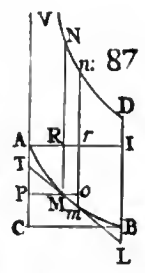
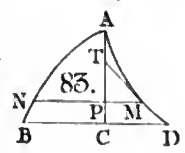
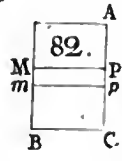
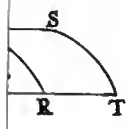
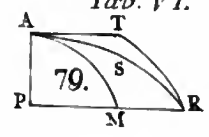
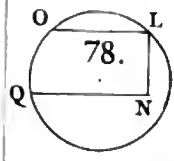


Tav. V.

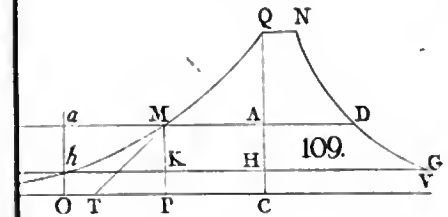
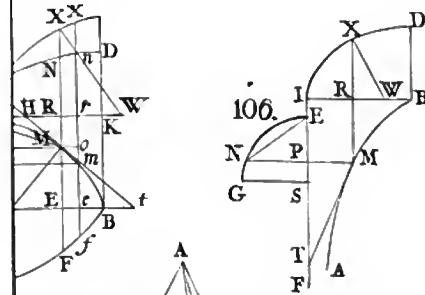
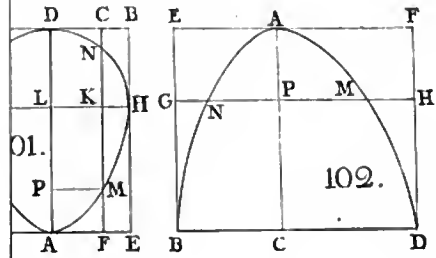
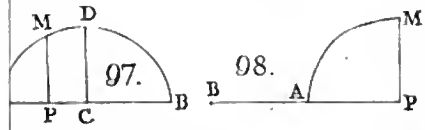




Tav. VI.



Tav. VII.



2 2 3 28

5. 3. 91

005663378